

ANNALEN DER PHYSIK

5. FOLGE • BAND 25 • HEFT 3 • FEBRUAR 1936

Einige instationäre Bewegungen der zähen Flüssigkeit mit zylindrischer Begrenzung

Von Wilhelm Müller

(Mit 8 Figuren)

I. Einleitung

Im folgenden sollen einige physikalisch-einfache, nichtstationäre Bewegungsvorgänge in einer reibenden Flüssigkeit betrachtet werden, die außer von der Zeit nur von einer (linearen oder zirkularen) Koordinate abhängen und als exakte Lösungen der Stokes-Navier-schen Differentialgleichungen abgeleitet werden können. Der Übersichtlichkeit halber möchte ich dabei zwischen Ausbreitungs- (oder Diffusions-) Vorgängen und Druckbewegungen unterscheiden. Die Ausbreitungsvorgänge, von denen einige bemerkenswerte Fälle bereits in einigen früheren Arbeiten¹⁾ besprochen sind, beziehen sich auf Bewegungen, die aus einem bestimmten Anfangszustand der Geschwindigkeits- bzw. der Wirbelverteilung sich entwickeln, wenn die Flüssigkeit oder das bewegte Medium sich selbst überlassen ist, ohne daß eine äußere oder innere Druckkraft in Wirksamkeit tritt. Diese Vorgänge lassen sich, auch in der mathematischen Formulierung, vergleichen mit den Wärmeleitungsvorgängen, die aus einer bestimmten anfänglichen Temperaturverteilung ableitbar sind. Dabei könnte man weiter die Unterscheidung der freien und der erzwungenen oder randgeführten Diffusion einführen, indem man etwa unter der erzwungenen Ausbreitung eine Bewegung versteht, die an die zeitlich bestimmte Bewegung des Randes oder eines Teiles des Randes geknüpft bleibt. Eine freie Ausbreitung entsteht z. B., wenn ein kreiszylindrischer Flüssigkeitsstrahl in das gleiche unbegrenzte Medium eintritt; eine randgeführte Ausbreitung liegt dagegen vor, wenn z. B. ein unendlich langer Kreiszyylinder in der unbegrenzten Flüssigkeit aus der Ruhe heraus plötzlich oder allmählich in gleichmäßige

1) Wilhelm Müller, Einführung in die Theorie der zähen Flüssigkeiten, Leipzig 1932, S. 90, 105; Verhandlg. des intern. Mathematiker-Kongresses, Zürich 1932, 2. S. 316; Z. a. M. M. 13. S. 395—408. 1933; Ann. d. Phys. [5] 19. S. 809—828. 1934; ferner S. Goldstein, Proc. London Math. Soc. (2) 34. S. 51—88. 1932.

Drehung versetzt wird. In der vorliegenden Arbeit sollen einige Beispiele der letzteren Art besprochen werden.

Die Druckbewegungen, die z. B. die bekannten Anlaufvorgänge umfassen, sollen dagegen unter dem Einfluß eines bestimmten Druckgefälles zustande kommen, das wieder von der Zeit abhängig sein kann. Eine Frage dieser Art ist z. B. der Übergang einer vorgegebenen Anfangsverteilung der Geschwindigkeit einsetzender Strömung im Kreisrohr in den stationären Endzustand der Poiseuilleströmung, wobei das Druckgefälle gewöhnlich entweder als konstant vorausgesetzt wird, oder einem Grenzwert sich asymptotisch annähert.

II. Reine Ausbreitungsvorgänge

Wenn wir die Strömung als linear und rotationssymmetrisch in bezug auf eine der Bewegungsrichtung parallele Achse verteilt voraussetzen, so lautet die Hauptgleichung für die Geschwindigkeit $v = v_z$ in Zylinderkoordinaten

$$(1) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\nu} \frac{\partial v}{\partial z},$$

wo μ den Reibungskoeffizienten und ν die kinematische Zähigkeit bedeuten. Als reine oder freie Ausbreitungserscheinung bezeichne ich diejenigen Bewegungen, die durch das Verschwinden des Druckgradienten

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

gekennzeichnet sind, und allein von der Anfangsverteilung der Geschwindigkeit abhängen. Sie sind vollständig identisch mit den rotationssymmetrisch verlaufenden Wärmeleitungsvorgängen, wenn man unter ν die Temperaturleitfähigkeit und unter v die Temperatur versteht.

Da die Geschwindigkeit mit wachsender Zeit abnimmt, benutzen wir als Lösungselement die Funktion

$$(2) \quad v = A e^{-\lambda^2 \nu t} \cdot J_0(\lambda r),$$

wo λ eine zunächst beliebige Konstante und J_0 die Besselsche Funktion nullter Ordnung bedeuten. Weitere Integrale ergeben sich aus (2) durch Summenbildung bzw. Integralbildung, wobei die Größe λ und mit ihr die Größe A zu variieren sind.

Die allgemeine Darstellung der Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der für $t = 0$ geltenden (stetigen oder stückweise stetigen) Anfangsverteilung $F(r)$ erhält man bei unbegrenzter Ausdehnung der Flüssigkeit in Verbindung mit der allgemeinen Formel

$$(3) \quad \frac{1}{2} [F(r-0) + F(r+0)] = \int_0^\infty \varrho F(\varrho) d\varrho \int_0^\infty \lambda J_0(\lambda \varrho) J_0(\lambda r) d\lambda,$$

die unter der Voraussetzung gilt, daß $F(\rho)\sqrt{\rho}$ von 0 bis ∞ absolut integrierbar ist. Dabei bedeutet die linke Seite bei einer Unstetigkeit der Funktion $F(r)$ das arithmetische Mittel der unmittelbar vor und hinter dem Sprung auftretenden Funktionswerte. Dann hat zu einer beliebigen Zeit t die Geschwindigkeit den Wert

$$(4) \quad v = \int_0^\infty \rho F(\rho) d\rho \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda^2 \nu t} J_0(\lambda \rho) J_0(\lambda r) d\lambda,$$

der auf Grund einer viel benutzten Formel¹⁾ zu der weiteren Darstellung führt

$$(5) \quad v = \frac{1}{2\nu t} \int_0^\infty \rho F(\rho) e^{-\frac{r^2 + \rho^2}{4\nu t}} I_0\left(\frac{r\rho}{2\nu t}\right) d\rho,$$

wo $I_0(z) = J_0(iz)$ gesetzt ist. In den bereits angeführten Arbeiten habe ich mehrere Anwendungen dieser Formeln gegeben, insbesondere die Ausbreitung eines kreiszylindrischen Flüssigkeitsstrahles in dem gleichen unbegrenzten, anfangs ruhenden Medium untersucht.

Die Gl. (1) mit $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$ beherrscht gleichzeitig die Wirbelbewegung bei der ebenen zirkularen Strömung, während die Geschwindigkeit der weiteren Gleichung

$$(6) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} = \frac{1}{\nu} \frac{\partial v}{\partial t}$$

genügt. Die Integrale von (6) unterscheiden sich von den entsprechenden der Gl. (1) nur dadurch, daß an Stelle der Besselschen Funktion nullter Ordnung die Besselsche Funktion J_1 erster Ordnung tritt. Auch für diese Bewegungsart habe ich mehrere Beispiele gegeben, u. a. die Ausbreitung bzw. Auflösung eines kreissymmetrisch angeordneten Wirbelsystems, und dabei auf die Analogie mit den entsprechenden Wärmeleitungsfällen hingewiesen.

III. Ausbreitung bei konstanter Randgeschwindigkeit

Randgeführte oder erzwungene Ausbreitungsvorgänge entstehen, wenn der Rand eine vorgeschriebene, d. h. während des ganzen in Frage kommenden Zeitverlaufs gegebene Bewegung ausführt. Wir wollen etwa eine lineare, rotationssymmetrisch begrenzte Bewegung voraussetzen und annehmen, daß der Zylinder mit der Flüssigkeit zur Zeit $t = 0$ in Ruhe ist und plötzlich in der Richtung seiner Achse mit konstanter Geschwindigkeit U bewegt wird. Dabei haben

1) Vgl. W. Müller, Einführung in die Theorie der zähen Flüssigkeiten, Leipzig 1932, S. 115.

wir die beiden wesentlich verschieden zu behandelnden Fälle zu unterscheiden, daß die Flüssigkeit im Innern oder im Außengebiet des Zylinders sich befindet.

1. Wenn die Flüssigkeit das Innere des Zylinders ausfüllt, so können wir v in der Form

$$v = U - \sum_{i=0}^{\infty} A_i J_0(\lambda_i r) e^{-\lambda_i^2 r t} = U - v_1$$

ansetzen, während verlangt werden muß, daß v_1 für $t \rightarrow 0$ in den konstanten Wert U übergeht und für $t \rightarrow \infty$ verschwindet. Ferner aber muß v_1 am Rand, d. h. also für $r = a$ für alle von Null verschiedenen Werte von t verschwinden. Die zweite Bedingung ist von vornherein erfüllt, wenn die A_i endlich sind. Um der letzten Bedingung zu genügen, bestimmt man die Parameter λ_i als Wurzeln der Gleichung $J_0(\lambda_i a) = 0$. Um schließlich der ersten Forderung entsprechend die Koeffizienten A_i der Beziehung

$$U = \sum_{i=1}^{\infty} A_i J_0(\lambda_i r)$$

anzupassen, multipliziert man beide Seiten mit $r \cdot J_0(\lambda_k r)$ und integriert zwischen den Grenzen 0 und a . Benutzt man für die linke Seite die für eine allgemeine Zylinderfunktion $Z_n(\lambda r)$ geltende Formel

$$(7) \quad d[r^n Z_n(\lambda r)] = \lambda r^n Z_{n-1}(\lambda r) dr,$$

für die rechte Seite dagegen die wegen $J_0(\lambda_i a) = 0$, $J_0(\lambda_k a) = 0$ geltenden Beziehungen

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^a r Z_n(\lambda_i r) Z_n(\lambda_k r) dr = 0 \quad (\text{für } i \neq k), \\ \int_0^a r Z_n^2(\lambda_i r) dr = \frac{1}{2} \left[r^2 Z_n'^2(\lambda_i r) \right]_0^a, \end{array} \right.$$

so ergibt sich in unserem Falle wegen $Z_0'(x) = -Z_1(x)$

$$A_i = \frac{2}{\lambda_i a J_1(\lambda_i a)}$$

und daher für v der Ausdruck

$$(9) \quad v = U \left[1 - 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_i r) e^{-\lambda_i^2 r t}}{\lambda_i a J_1(\lambda_i a)} \right],$$

der mit $\lambda_1 a = s_1$, $\frac{v}{a^2} = \tau$, $\frac{r}{a} = x$ die dimensionslose Form annimmt:

$$(9a) \quad \frac{v}{u} = 1 - 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(s_i x) e^{-s_i^2 \tau}}{s_i J_1(s_i)}.$$

Wir haben in der Fig. 1 die Geschwindigkeitsverteilung v/U für einige Werte von τ graphisch veranschaulicht.

2. Der gegebene Ansatz ist nicht mehr gültig für den Fall der unendlich ausgedehnten Flüssigkeit oder wenn die Flüssigkeit sich außerhalb des Kreiszylinders befindet. Es wird dann nötig sein, die Besselsche Funktion zweiter Art mit in den Ansatz aufzunehmen bzw. statt J_0 eine zusammengesetzte Besselsche Funktion zu benutzen, die sich als lineare Kombination der Funktion erster und zweiter Art darstellt. Die bei Watson mit $Y_n(x)$ bezeichnete Funktion hat die Reihenentwicklung:

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} Y_n(x) &= \frac{2}{\pi} \left\{ \ln \frac{x}{2} \gamma \cdot J_n(x) - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) J_n(x) \right. \\ &\quad - \frac{n!}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n-k} \left(\frac{2}{x} \right)^{n-k} \frac{J_k(x)}{k!} \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{n+2k}{k(n+k)} J_{n+2k}(x) \right\}, \end{aligned} \right.$$

in der $\ln \frac{2}{\gamma} = 0,11593$ zu setzen ist und die rechts auftretenden Funktionen die gewöhnlichen Besselschen Funktionen erster Art bedeuten. Wie man sieht, besitzt die Funktion im Nullpunkt $x=0$ eine logarithmische Singularität, die aber in unserem Falle ($x=\lambda r$) wegen $r > a$ ausgeschlossen ist. Setzen wir:

$$S_n(\lambda r, \lambda \varrho) = J_n(\lambda r) \cdot Y_n(\lambda \varrho) - Y_n(\lambda r) \cdot J_n(\lambda \varrho),$$

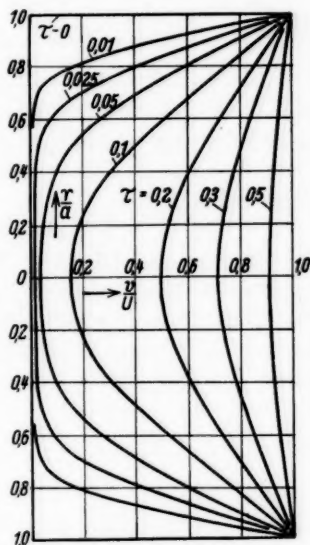


Fig. 1. Wirkung einer plötzlich einsetzenden Axialbewegung eines Zylinders auf die Flüssigkeit im Innern

so gilt folgende Formel von Weber und Orr¹⁾:

$$(11) \quad \left\{ \int_0^{\infty} \frac{S_n(\lambda r, \lambda a)}{J_n^2(\lambda a) + Y_n^2(\lambda a)} \lambda d\lambda \int_a^{\infty} S_n(\lambda \varrho, \lambda a) \varrho F(\varrho) d\varrho \right. \\ \left. = \frac{1}{2} [F(r+0) + F(r-0)] \right.$$

für alle n , wenn die Funktion $\sqrt{\varrho} \cdot F(\varrho)$ über das Intervall $a - \infty$ integrierbar ist. Dann genügt im besonderen die Funktion:

$$(12) \quad v = \int_0^{\infty} \frac{S_0(\lambda r, \lambda a)}{J_0^2(\lambda a) + Y_0^2(\lambda a)} e^{-\lambda^2 v t} \lambda d\lambda \int_a^{\infty} S_0(\lambda \varrho, \lambda a) \varrho F(\varrho) d\varrho$$

der Differentialgleichung (1) und gibt für $t \rightarrow 0$ die durch $F(r)$ gegebene Anfangsverteilung. Der Ausdruck verschwindet ferner für $r = a$, da S_0 in dem Intervall $a - \infty$ endlich bleibt. Die durch (12) dargestellte allgemeine Lösung kann daher in folgender Weise für unser Problem nutzbar gemacht werden. Nehmen wir nämlich $F(r) = U$ und setzen:

$$v_1 = U \int_0^{\infty} \frac{S_0(\lambda r, \lambda a)}{J_0^2(\lambda a) + Y_0^2(\lambda a)} e^{-\lambda^2 v t} \lambda d\lambda \int_a^{\infty} S_0(\lambda \varrho, \lambda a) \varrho d\varrho,$$

so genügt $U = v_1$ den oben formulierten Bedingungen, d. h. v geht für $t \rightarrow 0$ in den Wert Null über, während am Rand $r = a$ für alle Werte $t \neq 0$ der Wert $v = U$ herrscht, der schließlich nach unendlich langer Zeit für die Geschwindigkeit aller Punkte in der Flüssigkeit erreicht wird. Nun ist aber, wenn wir die bekannte Formel²⁾

$$(13) \quad J_1(\lambda a) Y_0(\lambda a) - Y_1(\lambda a) \cdot J_0(\lambda a) = \frac{2}{\pi \cdot \lambda a}$$

anwenden:

$$\int_a^{\infty} [J_0(\lambda \varrho) Y_0(\lambda a) - Y_0(\lambda \varrho) J_0(\lambda a)] \varrho d\varrho \\ = \left\{ \frac{\varrho}{\lambda} [J_1(\lambda \varrho) Y_0(\lambda a) - Y_1(\lambda \varrho) J_0(\lambda a)] \right\}_a^{\infty} = - \frac{2}{\pi \lambda^2}.$$

Wir erhalten also:

$$(14) \quad v = U \left[1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{S_0(\lambda r, \lambda a) e^{-\lambda^2 v t} d\lambda}{\lambda [J_0^2(\lambda a) + Y_0^2(\lambda a)]} \right].$$

1) Vgl. E. C. Titchmarsh, Proc. London Math. Soc. [2] 22. S. II—III. 1924.

2) Vgl. etwa G. N. Watson, A Treatise on Bessel-Functions, Cambridge 1922, S. 77.

Die Formeln lassen sich verallgemeinern im Sinne der Annahme, daß die Geschwindigkeit der Randbewegung nicht mehr konstant, sondern als Funktion der Zeit gegeben ist.

IV. Ausbreitung bei veränderlicher Randgeschwindigkeit

Um die für diese Erweiterung anzuwendende Methode zu zeigen, wollen wir den Fall der zirkularen Bewegung heranziehen und die Umfangsgeschwindigkeit des rotierenden Grenzzylinders in der Form

$$u \cdot f(t)$$

annehmen. Unter der Voraussetzung, daß

$$\Delta \varphi(r) - \frac{\varphi(r)}{r^2} = 0,$$

also $\varphi(r)$ einem stationären Zustande entspricht, ferner daß $\varphi(r)$ für den Rand $r = a$ in u übergeht, setzen wir:

$$v_1 = \varphi(r) \cdot f(t).$$

Dann ist

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = \varphi(r) \cdot f'(t).$$

Bestimmen wir also v_2 so, daß die Gleichung

$$\Delta v_2 - \frac{v_2}{r^2} = \frac{1}{r} \left[\varphi(r) \cdot f'(t) + \frac{\partial v_1}{\partial t} \right]$$

erfüllt ist, so genügt die Summe $v = v_1 + v_2$ der grundlegenden Gl. (1). Um die entscheidende Lösung v_2 zu finden, entwickelt man $\varphi(r)$ in eine Reihe mit Besselschen Funktionen $J_1(\lambda_i r)$ und führt für v_2 eine Reihe von der Form

$$v_2 = \sum_{i=1}^{\infty} B_i(t) e^{-\lambda_i^2 r^2} J_1(\lambda_i r)$$

ein, wobei die Parameter λ_i als Wurzeln der Gleichung $J_1(\lambda_i a) = 0$ zu bestimmen sind. Nach Einsetzung in die Differentialgleichung (6) ergibt sich dann für jeden Index i eine Beziehung, aus der die $B_i(t)$ durch eine einfache Quadratur sich berechnen lassen.

1. *Flüssigkeit im Innern des Zylinders.* In diesem Falle ist z. B.

$$\varphi(r) = \omega \cdot r$$

zu setzen. Wir erhalten ferner durch die bekannte, oben für einen Spezialfall entwickelte Bessel-Fouriersche Integrationsmethode [vgl. (8)] die Reihendarstellung

$$(15) \quad \omega r \cdot f'(t) = 2 \omega f'(t) \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_2(\lambda_i a) \cdot J_1(\lambda_i r)}{\lambda_i J_1'^2(\lambda_i a)},$$

die wegen

$$x J'(x) = J_1(x) - x J_2(x) = x J_0(x) - J_1(x)$$

und

$$J_1(\lambda_i a) = 0$$

auch in der Form

$$\omega r \cdot f'(t) = 2 \omega a \cdot f'(t) \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_i r)}{\lambda_i a J_2(\lambda_i a)} = -2 \omega a f'(t) \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_i r)}{\lambda_i a J_0(\lambda_i a)}$$

geschrieben werden kann. Die Differentialgleichung ergibt dann:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} B_i e^{-\lambda_i^2 v t} \left[\Delta J_1(\lambda_i r) - \frac{J_1(\lambda_i r)}{r^2} + \lambda_i^2 J_1(\lambda_i r) \right] \\ = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d B_i}{d t} e^{-\lambda_i^2 v t} J_1(\lambda_i r) - \frac{2 \omega a}{v} f'(t) \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_i r)}{\lambda_i a J_0(\lambda_i a)}. \end{aligned}$$

Da der Inhalt der ersten eckigen Klammer nach der Definition der Besselschen Funktionen verschwindet, so kommt für B_i

$$(16) \quad B_i = \frac{2 \omega a}{\lambda_i a J_0(\lambda_i a)} \int_0^t f'(t) e^{\lambda_i^2 v t} dt$$

und damit unter Voraussetzung der Konvergenz als Gesamtlösung:

$$(17) \quad v = v_1 + v_2 = \omega r \cdot f(t) + 2 \omega a \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_i r) e^{-\lambda_i^2 v t}}{\lambda_i a \cdot J_0(\lambda_i a)} \int_0^t f'(t) e^{\lambda_i^2 v t} dt.$$

Die Geschwindigkeit ist damit also in zwei Teile zerlegt, von denen der erste von der Geschwindigkeit und der zweite von der Beschleunigung der Randbewegung abhängt. Da aber $f'(t)$ unter dem Integralzeichen steht, darf man daraus nicht schließen, daß der zweite Bestandteil bei konstanter Bewegung verschwindet.

a) Nehmen wir nämlich:

$$f(t) = 1 - e^{-k^2 v t} = 1 - e^{-\alpha^2 \tau},$$

was einer anfangs beschleunigten, später angenähert konstanten Rotation des Zylinders entspricht, so wird:

$$\begin{aligned} x_i = e^{-\lambda_i^2 v t} \int_0^t f'(t) e^{\lambda_i^2 v t} dt &= \frac{k^2}{k^2 - \lambda_i^2} (e^{-\lambda_i^2 v t} - e^{-k^2 v t}) \\ &= \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - s_i^2} (e^{-s_i^2 \tau} - e^{-\alpha^2 \tau}). \end{aligned}$$

Man sieht dann, daß für jedes α die Größen x_i für wachsende Wurzeln s_i der Funktion $J_1(s_i)$ eine Reihe positiver abnehmender Zahlen darstellen, die um so stärker gegen Null konvergieren, je größer α und je größer τ werden. Da aber die vor dem Integral

stehende Summe im Ausdruck (17) für $\tau = 0$ und damit für alle Werte τ konvergiert, so bleibt die Konvergenz bei Hinzufügung der Faktoren x_i erhalten. Wenn α zufällig einer der Nullstellen s_k gleich wird, so nimmt $\frac{1}{\alpha^2} x_k$ den Wert

$$\lim_{\alpha \rightarrow s_k} \frac{x_k}{\alpha^2} = \lim_{\alpha \rightarrow s_k} \frac{e^{-s_k^2 \tau} - e^{-\alpha^2 \tau}}{\alpha^2 - s_k^2} = \tau e^{-\tau s_k^2}$$

an. Ein Unendlichwerden einzelner Reihenglieder ist also jedenfalls ausgeschlossen. Man erhält also als Lösung

$$(18) \quad v = \omega r (1 - e^{-\alpha^2 \tau}) + 2\omega a \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - s_i^2} \frac{J_0(s_i x)}{s_i J_0(s_i)} (e^{-s_i^2 \tau} e^{-\alpha^2 \tau}).$$

Wenn α nun unendlich wird, so haben wir den Fall einer *plötzlich einsetzenden und konstant bleibenden* Rotation des Zylinders. Die Bewegung der Flüssigkeit geschieht dann im Sinne der Formel

$$(19) \quad v = \omega a \left[x + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(s_i x)}{s_i J_0(s_i)} e^{-s_i^2 \tau} \right].$$

Wir haben in den Figg. 2 und 3 die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der dimensionslosen Zeitvariablen τ für eine Reihe von x -Werten dargestellt und zwar für die Fälle $\alpha = 10$ und $\alpha = \infty$. Die bei der Drehung des Zylinders zu überwindende, auf die Flächeneinheit bezogene Reibung wird

$$R = \mu \omega \left[1 - e^{-\alpha^2 \tau} + 2\alpha^2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{-s_i^2 \tau} - e^{-\alpha^2 \tau}}{\alpha^2 - s_i^2} \right].$$

Sie steigt, wie die Fig. 4 zeigt, für alle endlichen α , vom Werte Null, bis zu einem Maximum, um sich dann asymptotisch dem Grenzwerte $(R)_{\tau \rightarrow \infty} = \mu \omega$ zu nähern. Nur für $\alpha = \infty$ wird die Anfangsreibung theoretisch unendlich groß.

b) Ist die Beschleunigung der Drehung konstant, also

$$(v)_{\tau=0} = \varepsilon_0 \cdot t,$$

so wird

$$v_1 = \varepsilon_0 \frac{r}{a} \cdot t = \varepsilon_0 x t.$$

Es entsteht dann die Lösung

$$(20) \quad v = \varepsilon_0 \frac{r}{a} t + \frac{2\varepsilon_0 a^2}{v} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_i r)}{(\lambda_i a)^3 J_0(\lambda_i a)} (1 - e^{-\lambda_i^2 \tau t}).$$

Nun ist, wie man leicht feststellt

$$r(a^2 - r^2) = -16a^3 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_i r)}{(\lambda_i a)^3 J_0(\lambda_i a)}.$$

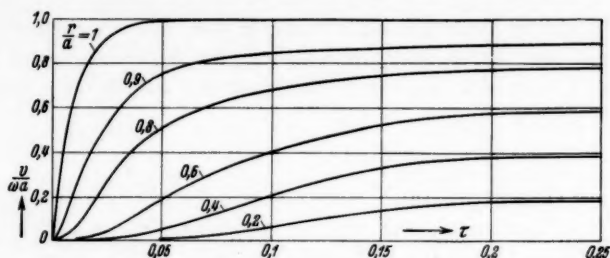


Fig. 2. Wirkung einer allmählich einsetzenden Drehung des Zylinders

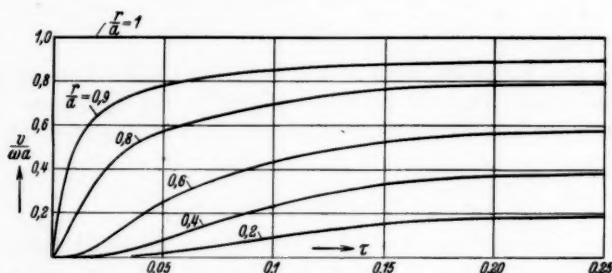
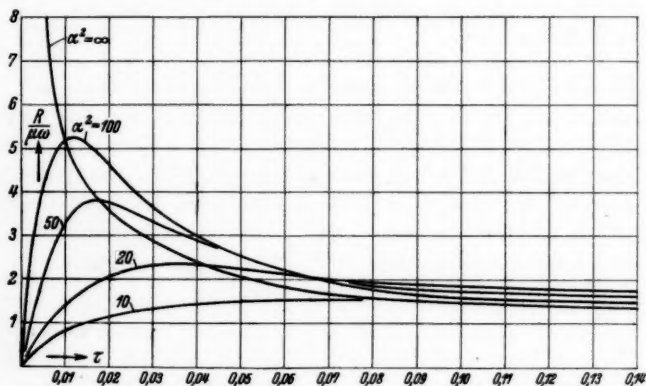


Fig. 3. Wirkung einer plötzlich einsetzenden Drehung des Zylinders

Fig. 4. Reibung bei der Drehung eines mit Flüssigkeit gefüllten Zylinders
($\alpha^2 = 10, 20, 50, 100, \infty$)

Wenn man diese Formel auf das von t freie Glied anwendet, so bleibt

$$(20a) \quad v = \epsilon_0 \left\{ \frac{r}{a} \cdot t - \frac{a^2}{8\nu} \cdot \frac{r}{a} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) - 2 \frac{a^2}{\nu} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_i r)}{(\lambda_i a)^3 J_0(\lambda_i a)} e^{-\lambda_i^2 \nu t} \right\}$$

oder

$$(20b) \quad v = \frac{\varepsilon_0 a^2}{\nu} \left\{ x \cdot \tau - \frac{1}{8} x (1 - x^2) - 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(s_i x) e^{-s_i^2 \tau}}{s_i^3 J_0(s_i)} \right\}.$$

Man erkennt, daß die Reihe nur bei kleinen Zeitwerten ins Gewicht fällt. Für größere Werte τ kann man angenähert setzen

$$v \sim \frac{\varepsilon_0 a^2}{\nu} \left[\frac{r}{a} \tau - \frac{1}{8} \frac{r}{a} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \right]$$

und für $\tau \rightarrow \infty$ geht v in eine lineare Funktion über. Auch die Zeichnung (Fig. 5) zeigt, daß die Kurven für die Geschwindigkeits-

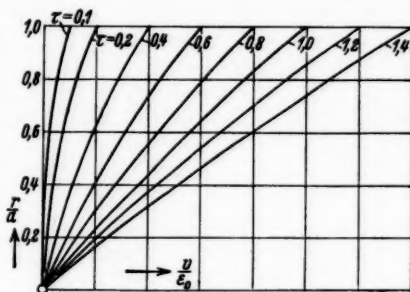


Fig. 5. Wirkung einer gleichförmig beschleunigten Drehung des Zylinders auf die Flüssigkeit im Innern

verteilung mit wachsendem τ den Charakter von geraden Linien annehmen.

c) Nach derselben Methode lassen sich auch die erzwungenen Schwingungen berechnen, die von einer vorgegebenen Drehschwingung des Zylinders erzeugt werden. Wenn die Geschwindigkeit des Randes $\omega a \sin \beta \tau$ ist, so erhält man

$$(21) \quad \left\{ v = \omega r \sin \beta \tau + 2 \omega a \beta \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(s_i x)}{s_i (s_i^4 + \beta^2) J_0(s_i)} \cdot [s_i^2 \cos \beta \tau + \beta \sin \beta \tau - s_i^2 e^{-s_i^2 \tau}] \right\}.$$

Benutzt man die Reihenentwicklung für die Funktion r , so läßt sich der Ausdruck in die Form setzen

$$(21a) \quad \left\{ v = -2 \omega a \beta \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(s_i x) s_i e^{-s_i^2 \tau}}{(s_i^4 + \beta^2) J_0(s_i)} - 2 \omega a \sin \beta \tau \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i^3 J_1(s_i x)}{(s_i^4 + \beta^2) J_0(s_i)} + 2 \omega a \beta \cos \beta \tau \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i J_1(s_i x)}{(s_i^4 + \beta^2) J_0(s_i)} \right\}.$$

Es ergibt sich, daß die Anfangsbeschleunigung $\left(\frac{\partial v}{\partial \tau}\right)_{\tau=0}$ für alle Werte $x < 1$ verschwindet und nur für $x = 1$ entsprechend der Grenzbedingung den Wert $\omega a \beta$ annimmt. Mit wachsender Zeit geht die Bewegung der Flüssigkeit in eine rein harmonische Bewegung über, die gegen die erregende Schwingung des Zylinders um so stärker phasenverschoben ist, je größer die Frequenz β und

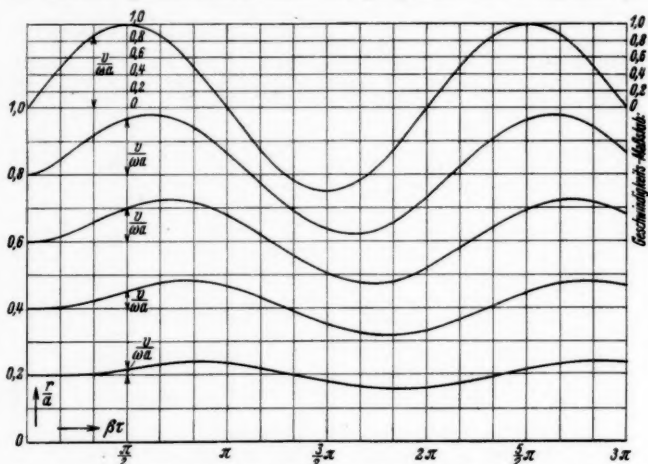


Fig. 6. Wirkung der Drehschwingung eines Kreiszylinders auf die Flüssigkeit im Innern

der Abstand von der Wand werden, während die Amplituden mit wachsendem Abstand sich verkleinern. Wir haben in der Fig. 6 die $\left(\frac{v}{\omega a}, \tau\right)$ -Kurven für verschiedene Werte x (0,2; 0,4; 0,6; 0,8) in der Weise nebeneinandergestellt, daß die τ -Achsen die Abstände $x = \frac{r}{a}$ von der Achse $x = 0$ haben. Es treten dann die Phasenverschiebung und die Amplitudenänderung deutlich hervor.

2. Wenn die Flüssigkeit zwischen zwei konzentrischen Zylindern ($r = a, r = b < a$) eingeschlossen ist und wenn der äußere Zylinder sich mit der Geschwindigkeit $\omega_1 a f_1(t)$, der innere sich mit der Geschwindigkeit $\omega_2 b \cdot f_2(t)$ dreht, so haben wir

$$(22) \quad v_1 = F(r, t) = A r + \frac{B}{r}$$

zu setzen. Es ergeben sich dann für die im allgemeinen von t abhängigen A und B die Werte

$$(22a) \quad A = \frac{a^2 \omega_1 f_1(t) - b^2 \omega_2 f_2(t)}{a^2 - b^2}; \quad B = \frac{a^2 b^2 (\omega_2 f_2(t) - \omega_1 f_1(t))}{a^2 - b^2}.$$

Wir können daher $F(r, t)$ in die Form

$$(23) \quad F(r, t) = \varphi_1(r) \cdot f_1(t) + \varphi_2(r) \cdot f_2(t)$$

setzen, wo

$$(23a) \quad \varphi_1(r) = \frac{a^2 \omega_1 \left(r - \frac{b^2}{r} \right)}{a^2 - b^2}; \quad \varphi_2(r) = \frac{b^2 \omega_2 \left(\frac{a^2}{r} - r \right)}{a^2 - b^2}.$$

Der zweite Bestandteil v_2 der Gesamtlösung muß also der Gleichung

$$(24) \quad \Delta v_2 - \frac{v_2}{r^2} = \frac{1}{\nu} \left[\varphi_1(r) \cdot f_1'(t) + \varphi_2(r) \cdot f_2'(t) + \frac{\partial v_2}{\partial t} \right]$$

genügen. Statt der Besselschen Funktionen J_1 ist in diesem Falle die zusammengesetzte Zylinderfunktion

$$(25) \quad Z_1(\lambda r) = \frac{J_1(\lambda r)}{J_1(\lambda b)} - \frac{Y_1(\lambda r)}{Y_1(\lambda b)} = \frac{S_1(\lambda r, \lambda b)}{J_1(\lambda b) \cdot Y_1(\lambda b)}$$

zu verwenden und die Parameter λ als Wurzeln der Gleichung

$$(26) \quad S_1(\lambda a, \lambda b) = 0$$

zu bestimmen. $Z_1(\lambda r)$ hat alsdann die Eigenschaft, für $r = a$ und $r = b$ zu verschwinden. Die Entwicklung der Funktionen $\varphi_1(r)$ und $\varphi_2(r)$ nach $Z_1(\lambda r)$ geschieht in derselben Weise wie es oben gezeigt wurde, an der Hand der allgemeinen Formeln (8), die auf das Intervall a bis b anzuwenden sind. Wenn man

$$\varphi_1(r) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i Z_1(\lambda_i r); \quad \varphi_2(r) = \sum_{i=1}^{\infty} D_i Z_1(\lambda_i r)$$

mit $r Z_1(\lambda_i r)$ multipliziert und über dieses Intervall integriert, so gewinnt man durch eine leichte Rechnung wegen $2Z_1' = Z_0 - Z_2$, $Z_0 + Z_2 = \frac{2}{x} Z_1 = 0$ für $x = \lambda a$ und λb die Beziehungen

$$(27) \quad \begin{cases} \varphi_1(r) = -2a^2 \omega_1 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{Z_0(\lambda_i a) Z_1(\lambda_i r)}{\lambda_i [a^2 Z_0^2(\lambda_i a) - b^2 Z_0^2(\lambda_i b)]}; \\ \varphi_2(r) = 2b^2 \omega_2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{Z_0(\lambda_i b) Z_1(\lambda_i r)}{\lambda_i [a^2 Z_0^2(\lambda_i a) - b^2 Z_0^2(\lambda_i b)]}. \end{cases}$$

Wenn man die Funktion S einführt und die bekannte Beziehung

$$(28) \quad S_{0,1}(\lambda b, \lambda b) = J_0(\lambda b) Y_1(\lambda b) - J_1(\lambda b) Y_0(\lambda b) = -\frac{2}{\pi \lambda b}$$

berücksichtigt, aus der in Verbindung mit $S_1(\lambda a, \lambda b) = 0$ die weitere Formel

$$(29) \quad S_{0,1}(\lambda a, \lambda b) = -\frac{2}{\pi \lambda a} \frac{J_1(\lambda a)}{J_1(\lambda b)}$$

sich ergibt, so erhält man

$$(30) \quad \begin{cases} \varphi_1(r) = \pi a \omega_1 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_i a) J_1(\lambda_i b) S_1(\lambda_i r)}{J_1^2(\lambda_i b) - J_1^2(\lambda_i a)}; \\ \varphi_2(r) = -\pi b \omega_2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1^2(\lambda_i a) S_1(\lambda_i r)}{J_1^2(\lambda_i b) - J_1^2(\lambda_i a)}. \end{cases}$$

Setzt man dann, wie oben, für v_2 die Entwicklung

$$v_2 = \sum B_i(t) e^{-\lambda_i^2 v t} S_1(\lambda_i r)$$

an, so lassen sich die Koeffizienten B_i berechnen, und es kommt schließlich als Lösung

$$(31) \quad \begin{cases} v = \varphi_1(r) \cdot f_1(t) + \varphi_2(r) \cdot f_2(t) \\ - \pi a \omega_1 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_i a) J_1(\lambda_i b) S_1(\lambda_i r) e^{-\lambda_i^2 v t}}{J_1^2(\lambda_i b) - J_1^2(\lambda_i a)} \int_0^t f_1'(t) e^{\lambda_i^2 v t} dt \\ + \pi b \omega_2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1^2(\lambda_i a) S_1(\lambda_i r) e^{-\lambda_i^2 v t}}{J_1^2(\lambda_i b) - J_1^2(\lambda_i a)} \int_0^t f_2'(t) e^{\lambda_i^2 v t} dt. \end{cases}$$

Wenn z. B. der äußere Zylinder ruht und nur der innere eine Drehung ausführt, so wird mit $\varphi_2(r) = \varphi(r) = \frac{\omega b^2}{a^2 - b^2} \frac{a^2 - r^2}{r}$ die Geschwindigkeitsfunktion

$$(31a) \quad \begin{cases} v = \frac{\omega b^2}{a^2 - b^2} \cdot \frac{a^2 - r^2}{r} f(t) + \pi b \omega \\ \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1^2(\lambda_i a) S_1(\lambda_i r) e^{-\lambda_i^2 v t}}{J_1^2(\lambda_i b) - J_1^2(\lambda_i a)} \int_0^t f'(t) e^{\lambda_i^2 v t} dt. \end{cases}$$

Die auf die Flächeneinheit bezogene Reibung am äußeren und inneren Zylinder haben wir im allgemeinen Falle die Werte

$$(32) \quad \begin{cases} R_a = \mu \left\{ \frac{\omega_1 (a^2 + b^2)}{a^2 - b^2} f_1(t) - \frac{2 b^2 \omega_2}{a^2 - b^2} f_2(t) + 2 \omega_1 \right. \\ \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1^2(\lambda_i b) e^{-\lambda_i^2 v t}}{J_1^2(\lambda_i b) - J_1^2(\lambda_i a)} \int_0^t f_1'(t) e^{\lambda_i^2 v t} dt \\ \left. + 2 \frac{b}{a} \omega_2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_i a) J_1(\lambda_i b) e^{-\lambda_i^2 v t}}{J_1^2(\lambda_i b) - J_1^2(\lambda_i a)} \int_0^t f_2'(t) e^{\lambda_i^2 v t} dt \right\}, \end{cases}$$

$$(32a) \quad \left\{ \begin{aligned} R_i = \mu & \left\{ \frac{2a^3 \omega_1}{a^3 - b^3} f_1(t) - \frac{\omega_2 (a^3 + b^3)}{a^3 - b^3} f_2(t) + 2\omega_1 \frac{a}{b} \right. \\ & \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda a) J_1(\lambda b) e^{-\lambda^2 \nu t}}{J_1^2(\lambda b) - J_1^2(\lambda a)} \int_0^t f_1'(t) e^{\lambda^2 \nu t} dt \\ & \left. - 2\omega_2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1^2(\lambda a) e^{-\lambda^2 \nu t}}{J_1^2(\lambda b) - J_1^2(\lambda a)} \int_0^t f_2'(t) e^{\lambda^2 \nu t} dt \right\}. \end{aligned} \right.$$

Wenn z. B. die Zylinder gleichsinnig rotieren, wird die Bewegung jedes Zylinders die Reibung am andern Zylinder verkleinern, während bei ungleichsinniger Drehung die Reibungskräfte entsprechend vergrößert werden.

3. *Flüssigkeit außerhalb des Zylinders.* Dieser Fall, der besondere Beachtung verdient, läßt sich mit Hilfe des unter (11) angegebenen Weber-Orrschen Integrals behandeln. Wir wollen annehmen, daß für $r = a$ die Geschwindigkeit den Wert $\varphi(a) \cdot f(t)$ besitzt. Dann ist $\varphi(r) = \omega \frac{a^2}{r}$ zu setzen und wir haben $v_1 = \varphi(r) \cdot f(t)$, während v_2 der Gleichung

$$\Delta v_2 - \frac{v_2}{r^2} = \frac{1}{r} \left[\omega \frac{a^2}{r} f'(t) + \frac{\partial v_2}{\partial t} \right]$$

genügt. Nun ergibt sich aber aus (11) mit $F(\rho) = \omega \frac{a^2}{\rho}$ wegen

$$\int_a^\infty S_1(\lambda \rho, \lambda a) d\rho = -\frac{1}{\lambda} S_{1,0}(\lambda a) = -\frac{2}{\pi \lambda^3 a}$$

für $1/r$ die Darstellung

$$(33) \quad \frac{1}{r} = -\frac{2}{\pi a} \int_0^\infty \frac{S_1(\lambda r)}{[J_1^2(\lambda a) + Y_1^2(\lambda a)]} \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

Nehmen wir ferner für v_2 eine Entwicklung von der Art

$$v_2 = \int_0^\infty B(\lambda, t) \frac{S_1(\lambda r)}{J_1^2(\lambda a) + Y_1^2(\lambda a)} \cdot \frac{d\lambda}{\lambda}$$

an, so ergibt sich nach Einführung in die Differentialgleichung (6)

$$B = \frac{2\omega a}{\pi} \int_0^t f'(t) e^{\lambda^2 \nu t} dt$$

und damit

$$(34) \quad v = \omega \frac{a^2}{r} \cdot f(t) + \frac{2\omega a}{\pi} \int_0^\infty \frac{S_1(\lambda r) e^{-\lambda^2 \nu t}}{J_1^2(\lambda a) + Y_1^2(\lambda a)} \int_0^t f'(t) e^{\lambda^2 \nu t} dt \cdot \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

Ist z. B. $f(t) = 1 - e^{-k^2 \nu t}$, so kommt

$$(35) \quad \left\{ \begin{aligned} v &= \omega \frac{a^2}{r} (1 - e^{-k^2 \nu t}) + \frac{2 \omega a k^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{(e^{-k^2 \nu t} - e^{-\lambda^2 \nu t})}{k^2 - \lambda^2} \\ &\quad \cdot \frac{S_1(\lambda r)}{[J_1^2(\lambda a) + Y_1^2(\lambda a)]} \cdot \frac{d\lambda}{\lambda} \end{aligned} \right.$$

Bei plötzlich einsetzender und konstant bleibender Rotation des Zylinders ($k^2 \rightarrow \infty$) entsteht die bereits von Goldstein¹⁾ angegebene Lösung

$$(36) \quad v = \frac{\omega a^2}{r} + 2 \frac{\omega a}{\pi} \int_0^\infty \frac{S_1(\lambda r) e^{-\lambda^2 \nu t}}{[J_1^2(\lambda a) + Y_1^2(\lambda a)]} \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

V. Geradlinige Laminarbewegung der Flüssigkeit in einem zylindrischen Rohr unter der Einwirkung eines Druckgefälles

Wenn wir ein zeitlich veränderliches Druckgefälle annehmen, so genügt die axial gerichtete Geschwindigkeit $v_z = v$ einer Lineargleichung von der Form

$$(37) \quad \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{\nu} \left[\frac{\partial v}{\partial t} - F(t) \right],$$

deren Integration auf Grund der gegebenen Entwicklungen durchgeführt werden kann.

1. Den Fall der instationären Bewegung bei konstantem Druckgefälle ($F(t) = \text{konst.}$) habe ich in einer demnächst erscheinenden Arbeit²⁾ ausführlich entwickelt für den kreisringförmigen Querschnitt. Es handelt sich dabei insbesondere um die Ermittlung der sogenannten Anlaufströmung³⁾, die bestimmt ist durch den Anfangszustand, für den man etwa die gleichmäßige Verteilung ($v = U = \text{konst.}$ für jedes r) annehmen kann und den stationären Endzustand, der beim Vollzylinder mit der bekannten Poiseuilleströmung identisch ist. Beim Hohlzylinder ($b < r < a$) ist für die Reihenentwicklung die zusammengesetzte Besselsche Funktion

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} Z_0(\lambda r) &= \frac{J_0(\lambda r)}{J_0(\lambda b)} - \frac{Y_0(\lambda r)}{Y_0(\lambda b)} = \frac{S_0(\lambda r, \lambda b)}{J_0(\lambda b) \cdot Y_0(\lambda b)} \\ \text{bzw.} \quad \bar{Z}_0(\lambda r) &= \frac{J_0(\lambda r)}{J_0(\lambda a)} - \frac{Y_0(\lambda r)}{Y_0(\lambda a)} = \frac{S_0(\lambda r, \lambda a)}{J_0(\lambda a) \cdot Y_0(\lambda a)} \end{aligned} \right.$$

zu nehmen, wobei die Parameter λ als Wurzeln der Gleichung

$$S_0(\lambda a, \lambda b) = 0$$

1) S. Goldstein, Proc. London Math. Soc. (2) **34**, S. 51. 1932.

2) Vgl. auch Vorträge Physiker- und Mathematikertag, Stuttgart, Z. a. M. M. Heft 6, 1935.

3) Vgl. L. Schiller, Z. a. M. M. **2**, S. 96. 1922.

zu ermitteln sind. Wenn $b \rightarrow 0$ wird, so geht die Funktion $Z_0(\lambda r)$ in die gewöhnliche Besselsche Funktion $J_0(\lambda r)$ und die λ in die Wurzeln der Gleichung $J_0(\lambda a) = 0$ über. Bei konstantem Druckgefälle ist der stationäre Endzustand durch

$$(39) \quad v = 2u \left[\frac{(1-x^2) \lg \frac{1}{q} - (1-q^2) \lg \frac{1}{x}}{(1+q^2) \lg \frac{1}{q} - (1-q^2)} \right]$$

dargestellt, wenn u die mittlere Geschwindigkeit bedeutet und

$$\frac{r}{a} = x, \quad \frac{b}{a} = q (< 1)$$

gesetzt ist. Der Übergang vom Anfangszustand in diesen Endzustand wird erhalten durch den Ausdruck

$$(40) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{v}{u} = \frac{2}{\varepsilon} \left[1 - x^2 - \frac{(1-q^2) \lg \frac{1}{x}}{\lg \frac{1}{q}} \right] \\ + \pi \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{U}{u} \frac{8}{\varepsilon s_i^2} \right) \frac{J_0(s_i) S_0(s_i x) e^{-s_i^2 \tau}}{J_0(s_i) + J_0(q s_i)}, \end{aligned} \right.$$

wo

$$1 + q^2 - \frac{1 - q^2}{\lg \frac{1}{q}} = \varepsilon$$

gesetzt ist. Für $b = 0$ wird $\varepsilon = 1$ und

$$(41) \quad \frac{v}{u} = 2(1 - x^2) + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{U}{u} - \frac{8}{s_i^2} \right) \frac{J_0(s_i x) e^{-s_i^2 \tau}}{s_i J_1(s_i)}.$$

Wir haben insbesondere die diesem Spezialfall entsprechende Geschwindigkeitsverteilung für verschiedene Zeitwerte graphisch ver-

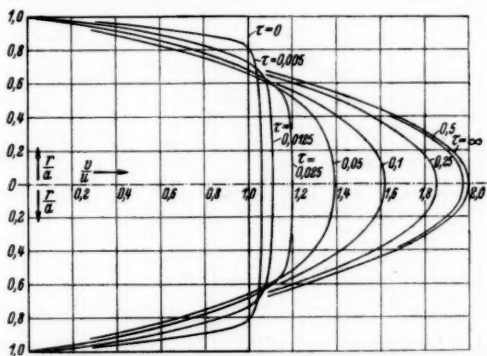


Fig. 7. Anlaufströmung in einem Kreiszylinder bei konstantem Druckgefälle

anschaulicht (Fig. 7) und verweisen im übrigen auf die ausführliche Darstellung, in der auch die zahlenmäßige Auswertung der allgemeinen Formel (40) durchgeführt ist.

2. Um für den Fall des veränderlichen Druckgefälles die entscheidende partikuläre Lösung zu ermitteln nach der oben geschilderten Methode, gehen wir aus von der Identität

$$F(t) = 2F(t) \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{S_0(\lambda_i r, \lambda_i b)}{\lambda_i [a S_1(\lambda_i a) + b S_1(\lambda_i b)]}$$

und von der unbestimmten Entwicklung

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} B_i(t) S_0(\lambda_i r, \lambda_i b) e^{-\lambda_i^2 v t}.$$

Man erhält dann aus der Differentialgleichung die Lösung

$$(42) \quad v = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{S_0(\lambda_i r) e^{-\lambda_i^2 v t}}{\lambda_i [a S_{1,0}(\lambda_i a) + b S_{1,0}(\lambda_i b)]} \int_0^t F(t) e^{\lambda_i^2 v t} dt$$

die mit Benutzung von (28) übergeht in

$$(42a) \quad v = \pi \sum_{i=1}^{\infty} \frac{S_0(\lambda_i r, \lambda_i b) J_0(\lambda_i a) e^{-\lambda_i^2 v t}}{J_0(\lambda_i a) + J_0(\lambda_i b)} \int_0^t F(t) e^{\lambda_i^2 v t} dt.$$

Die Lösung kann vervollständigt werden durch Hinzufügung einer Reihe von derselben Art mit konstanten Koeffizienten, die verschiedenen Bedingungen angepaßt werden können.

Wir wollen in diesem Zusammenhange insbesondere noch den Fall der periodischen Druckänderung kurz behandeln und dabei einen kreisförmigen Querschnitt mit dem Radius a zugrunde legen. Wenn $b = 0$ ist, so geht der Ausdruck (42) über in

$$(43) \quad v = 2 \sum \frac{J(\lambda_i r) e^{-\lambda_i^2 v t}}{\lambda_i a J_1(\lambda_i a)} \int_0^t F(t) e^{\lambda_i^2 v t} dt$$

oder in dimensionsloser Schreibweise mit $\frac{a^2}{v} F\left(\frac{a^2 \tau}{v}\right) = f(\tau)$

$$(43a) \quad v = 2 \sum \frac{J_0(s_i x) e^{-s_i^2 \tau}}{s_i J_1(s_i)} \int_0^{\tau} f(\tau) e^{s_i^2 \tau} d\tau.$$

Setzen wir jetzt $f(\tau) = w \sin \beta \tau$, so wird

$$\int_0^{\tau} \sin \beta \tau e^{s_i^2 \tau} d\tau = \frac{\beta}{\beta^2 + s_i^4} + \frac{s_i^2 e^{s_i^2 \tau}}{\beta^2 + s_i^4} \sin \beta \tau - \frac{\beta e^{s_i^2 \tau}}{\beta^2 + s_i^4} \cos \beta \tau.$$

Wir erhalten also die gewünschte Lösung in der Form

$$(44) \quad \begin{cases} \frac{v}{w} = 2\beta \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(s_i x) e^{-\tau s_i^2}}{s_i (s_i^4 + \beta^2) J_1(s_i)} + 2\sin\beta\tau \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i J_0(s_i x)}{(s_i^4 + \beta^2) J_1(s_i)} \\ - 2\beta \cos\beta\tau \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(s_i x)}{s_i (s_i^4 + \beta^2) J_1(s_i)}, \end{cases}$$

die im wesentlichen mit der nach einer anderen Methode bestimmten Lösung von Szymanski¹⁾ übereinstimmt. Der Ausdruck (44) setzt

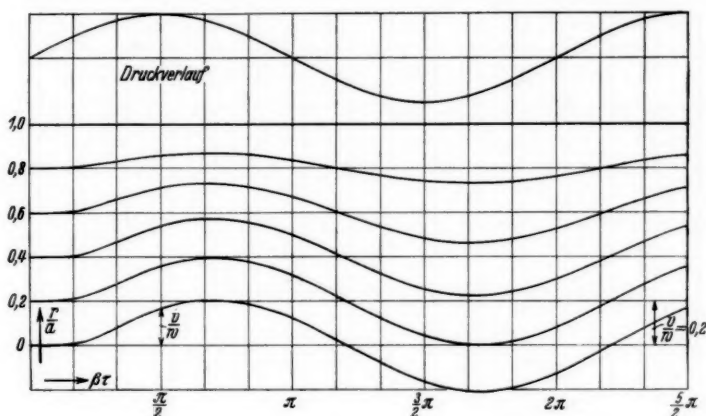


Fig. 8. Bewegung einer Flüssigkeit im Kreiszylinder bei periodischer Änderung des Druckgefälles

sich zusammen aus einem mit τ exponentiell abnehmendem Glied und zwei trigonometrischen Gliedern, die insgesamt eine periodische Schwingungsbewegung ausmachen. Diese Schwingung hat gegenüber der Druckschwankung eine Phasenverschiebung, die mit der Frequenz β und dem Abstand von der Wand wächst. Die Geschwindigkeitsverteilung ist aus Fig. 8 für die Werte $x = 0,2; 0,4; 0,6; 0,8$ berechnet und in ähnlicher Weise wie in dem oben behandelten Fall der Kreisschwingung graphisch in Abhängigkeit von der Zeit dargestellt.

Setzen wir $v = \frac{dz}{dt}$, so finden wir für den Weg z unter der Voraussetzung, daß die Bewegung mit $t = 0$ beginnt

1) P. Szymanski, Journ. mathém. p. et appl., Paris 1932. S. 67.

$$(45) \left\{ z = 2w \frac{a^2}{\nu} \left\{ \beta \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(s_i x) (1 - e^{-s_i^2 \tau})}{s_i^3 (s_i^4 + \beta^2) J_1(s_i)} + \frac{1}{\beta} (1 - \cos \beta \tau) \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i J_0(s_i x)}{(s_i^4 + \beta^2) J_1(s_i)} - \sin \beta \tau \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(s_i x)}{s_i (s_i^4 + \beta^2) J_1(s_i)} \right\} \right\}.$$

Wenn das Druckgefälle um einen Mittelwert periodisch schwankt, so haben wir noch die stationäre Lösung

$$2u(1 - x^2)$$

hinzuzufügen, wo u von dem Mittelwert des Druckgefälles abhängt. Dann wird auch die Geschwindigkeit an jeder Stelle um einen durch die Poiseuillesche Verteilung gegebenen Mittelwert oszillieren. Ist ferner eine bestimmte Anfangsverteilung für die Geschwindigkeit vorgeschrieben, so ist der Ausdruck für v noch zu ergänzen durch eine Lösung der druckfreien Diffusionsgleichung, deren Koeffizienten nach dem Bessel-Fourierschen Verfahren zu bestimmen sind. Ein weiteres Eingehen auf einige Spezialfragen behalten wir uns für eine andere Gelegenheit vor.

Aachen, Technische Hochschule.

(Eingegangen 15. November 1935)

**Bemerkungen zu meiner Kontinuumstheorie
der Röntgenstrahlinterferenzen**

Von E. Lohr

Die „Kontinuitätstheorie der Röntgenstrahlausbreitung in Kristallen“, die ich 1924 publizierte¹⁾, hat in den letzten Jahren erhebliches Interesse gefunden. An dieser Tatsache ändert der Umstand, daß die Ergebnisse meiner Arbeit erst durch die Neuformulierungen von M. v. Laue²⁾ und M. Kohler³⁾ in weiteren Kreisen bekannt geworden sind, wohl nichts Wesentliches.

Um Mißverständnissen zu begegnen, scheint es mir wünschenswert, die Identität der für die Ergebnisse maßgebenden Ausgangsgleichungen bei den genannten Neuformulierungen und bei mir aufzuzeigen.

M. v. Laue geht in seiner zitierten Arbeit von den Maxwell'schen Gleichungen:

$$(1) \quad \begin{cases} \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}; & \operatorname{rot} \left(\frac{\mathfrak{D}}{\varepsilon} \right) = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}; \\ \operatorname{div} \mathfrak{D} = 0; & \operatorname{div} \mathfrak{H} = 0 \end{cases}$$

aus und setzt:

$$(2) \quad 1 - \frac{1}{\varepsilon} = \psi = \sum \psi_m e^{-j \mathfrak{b}_m \cdot \mathfrak{r}} \quad (j = 2 \pi \sqrt{-1}),$$

worin die Summe einer dreifachen Fourierreihe entspricht. Aus (2) folgt:

$$(3) \quad \varepsilon = \frac{1}{1 - \psi}.$$

Führt man in die Maxwell'schen Gleichungen

$$(4) \quad \mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}$$

ein und schreibt dem v. Laueschen Ansatz entsprechend

$$(5) \quad \mathfrak{E} = e^{j \mathfrak{v} \cdot t} \hat{\mathfrak{E}}; \quad \mathfrak{H} = e^{j \mathfrak{v} \cdot t} \hat{\mathfrak{H}},$$

worin $\hat{\mathfrak{E}}$ und $\hat{\mathfrak{H}}$ nur mehr Ortsfunktionen sind, so lauten die Gl. (1):

$$(6) \quad j \mathfrak{v} \frac{1}{1 - \psi} \hat{\mathfrak{E}} = c \operatorname{rot} \hat{\mathfrak{H}}; \quad j \mathfrak{v} \hat{\mathfrak{H}} = - c \operatorname{rot} \hat{\mathfrak{E}}.$$

1) E. Lohr, Wiener Ber. **133**. S. 517–572. 1924; **135**. S. 655–674. 1926.

2) M. v. Laue, Erg. d. exakt. Naturwissensch. **10**. S. 133–158. 1931.

3) M. Kohler, Ann. d. Phys. [5] **18**. S. 265–287. 1933.

Die Integration dieser Differentialgleichungen muß alles Weitere ergeben und die Ergebnisse können durch den Umstand, daß v Laue mit \mathfrak{D} und \mathfrak{H} rechnet, nicht verändert werden.

Meine Theorie ist in die umfassendere Jaumannsche Kontinuums-theorie eingebettet und demgemäß mußte ich die Ausgangsgleichungen aus dem allgemeinen System der Differentialgesetze erst durch geeignete spezielle Annahmen gewinnen. Diese Ausgangsgleichungen, die dann auch bei mir allen weiteren Deduktionen zugrunde liegen¹⁾, lauten:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} j \nu (1 + \beta) \dot{\mathfrak{L}} = c \operatorname{rot} \mathfrak{H}, \\ j \nu \mathfrak{H} = -c \operatorname{rot} \dot{\mathfrak{L}}. \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Gl. (30) mit Benützung} \\ \text{von (20) der 1. Arbeit.} \end{array}$$

Nach den Ergänzungen der 2. Arbeit ist:

$$(8) \quad 1 + \beta = \frac{1}{1 + \beta'}$$

und β' als dreifache Fourierreihe anzusetzen [Gl. (11) und (12) der 2. Arbeit]. Damit ist die völlige Identität der Ausgangsgleichungen (6) und (7) aufgezeigt. Denn daß in meiner Theorie der „Lichtvektor“ \mathfrak{L} [definiert in (3) der 1. Arbeit] an die Stelle von \mathfrak{E} tritt, ist für die Wellenausbreitung ohne Belang.

Da \mathfrak{L} auch im Energiefluß und in den Grenzbedingungen an die Stelle von \mathfrak{E} tritt²⁾, können die Folgerungen aus den Ausgangsgleichungen (6) und (7) auch bei der Behandlung der Randwertprobleme nicht voneinander abweichen. Die auf S. 205, Fußnote 3 zitierte Kohlersche Arbeit „Dynamische Reflexion von Röntgenstrahlen an idealen, insbesondere absorbierenden Kristallen“ geht nur insofern über meine Arbeit hinaus, als Kohler im Falle absorbierender Kristalle eine komplexe dreifach periodische Funktion für die Dielektrizitätskonstante einführt, während ich auf diese Verallgemeinerung zwar hinweise, die Rechnung aber nur im Sonderfall der mit einer komplexen Konstanten multiplizierten reellen dreifach periodischen Funktion durchführe³⁾.

Da M. Kohler in seiner Arbeit „Dynamische Theorie der Kristallinterferenzen auf wellenmechanischer Grundlage“⁴⁾ zeigt, daß aus seinen Überlegungen die Ausgangsgleichungen:

$$(9) \quad \left(1 - \frac{e q}{\pi \mu \nu^2}\right) \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = c \operatorname{rot} \mathfrak{H}; \quad \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \mathfrak{E}$$

1) Auf S. 659 der 2. Arbeit wird das für das Eliminationsresultat von (7), dort Gl. (13), ausdrücklich gesagt.

2) Vgl. 1. Arbeit S. 521.

3) Vgl. 1. Arbeit S. 566–570.

4) Preußische Ak. Berichte 1935, XIX, S. 334–338.

folgen, worin ϱ als Ladungsdichte im ungestörten Kristall eine dreifach periodische Funktion des Ortes ist (e und μ bedeuten Ladung und Masse des Elektrons), möchte ich noch nachweisen, daß aus der von mir in meiner 1. Arbeit (S. 564) angesetzten Variante der Differentialgesetze unschwer die entsprechende Folgerung gezogen werden kann.

Diese Variante lautet:

$$(10) \quad \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + k \sigma_r = c \operatorname{rot} \mathfrak{H}; \quad \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \mathfrak{E}.$$

$$(11) \quad g \frac{\partial \sigma_r}{\partial t} + r \tau_r = k \mathfrak{E}; \quad g' \frac{\partial \tau_r}{\partial t} - r \sigma_r = 0,$$

worin σ_r und τ_r vektorische Zustandsvariable und g, g', r, k Materialfunktionen bedeuten, welche letztere alle derselben dreifach periodischen Funktion des Ortes proportional sind. An der zitierten Stelle sagte ich: „Die angeschriebenen Differentialgesetze, welche formal mit jenen der korpuskularen Dispersionstheorie¹⁾ übereinstimmen, entsprechen bei solchen Voraussetzungen einer räumlichen Struktur, die der korpuskulartheoretischen Auffassung einigermaßen nahekommt“.

Die folgenden Überlegungen führen lediglich diese 1924 gemachte Bemerkung weiter aus.

Bilden wir aus (11):

$$(12) \quad g \frac{\partial^2 \sigma_r}{\partial t^2} + \frac{r^2}{g} \sigma_r = k \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t},$$

so fällt die formale Analogie mit der aus der Lorentzschen Elektronentheorie folgenden Relation:

$$(13) \quad N \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + N \mu (2 \pi v_0)^2 v = N e \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}$$

in die Augen. Hierin bedeutet v die Geschwindigkeit (für kleine Schwingungen können wir $\partial v / \partial t$ und dv / dt verwechseln), μ und e Masse und Ladung einer Korpuskel der betreffenden Sorte, hier des Elektrons, N die Anzahl dieser Korpuskeln pro Volumeinheit, also $N e = \varrho$ die Ladungsdichte, schließlich v_0 die „Eigenfrequenz des dielektrischen Mediums“¹⁾. Identifizieren wir also der Reihe nach v , $4 \pi N \mu$, $4 \pi N \mu (2 \pi v_0)^2$, $4 \pi N e$ mit σ_r , g , r^2/g' , k , so geht in der elektrischen Gleichung noch $k \sigma_r$ in $4 \pi \varrho v$ über, wie es sein soll. Setzen

1) Im Rahmen einer Kontinuumstheorie ist es sinnvoll, von der „Eigen-schwingung des dielektrischen Mediums“ (vgl. Cl. Schaefer, „Einführung in die Theoretische Physik“, III. Bd., S. 689–690) auszugehen, also in (11) $k \mathfrak{E}$ und nicht $k \left(\mathfrak{E} + \frac{1}{3} \mathfrak{P} \right)$ zu schreiben.

wir alle Zustandsvariablen mit e^{jvt} proportional, so folgt mit Benützung obiger Relationen aus (12):

$$(14) \quad \sigma_r \left(\frac{r^2}{g g'} - (2\pi v)^2 \right) = \frac{e}{\mu} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}.$$

Gehen wir mit (14) in die elektrische Gleichung und beachten, daß $k = 4\pi\varrho$ ist, so folgt, wenn wir noch

$$(15) \quad (2\pi v)^2 \gg \frac{r^2}{g g'}$$

voraussetzen:

$$(16) \quad \left(1 - \frac{e\varrho}{\pi\mu v^2} \right) \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = c \operatorname{rot} \mathfrak{H}.$$

Gl. (16) ist aber mit (9) identisch.

Damit ist gezeigt, daß auch noch das von M. Kohler jüngst auf Grund der Wellenmechanik gewonnene Ergebnis auf anderem Wege, aus meinen seinerzeit aufgestellten Differentialgesetzen, erhalten werden kann.

Die in der Zurückführung des Problems auf allgemeine Prinzipien der Wellenmechanik liegende tiefere Bedeutung der Kohlerschen Konzeption entgeht mir nicht. — Wie betont, sind aber auch die Differentialgesetze meiner Theorie in dem in sich geschlossenen Systeme der Jaumannschen Kontinuumstheorie verankert.

Brünn, Physikalisches Institut der Deutschen Technischen Hochschule, Oktober 1935.

(Eingegangen 14. November 1935)

**Der Zusammenhang
von spontaner und wahrer Magnetisierung
mit dem Emissionsvermögen**

Von Walther Gerlach

(Mit 1 Figur)

Nach den Messungen von Hagen und Rubens besteht für die normalen Metalle die Beziehung

$$(1) \quad \varepsilon_\lambda = 0,0365 \cdot \sqrt{\frac{R}{\lambda}}$$

zwischen Widerstand R und Emissionsvermögen ε für lange Wellen. Einige der bisher vorliegenden Messungen über die Abhängigkeit des

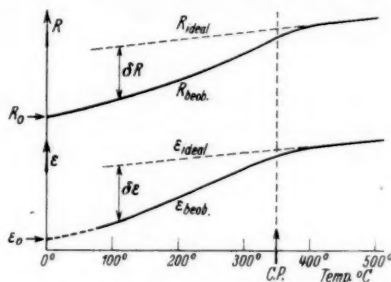


Fig. 1. Widerstand R und Emissionsvermögen ε als Funktion der Temperatur

Emissionsvermögens der ferromagnetischen Metalle Nickel und Eisen von der Temperatur zeigen im Bereich des Verschwindens der spontanen Magnetisierung einen anomalen Verlauf; da zu einer quantitativen Verbindung desselben mit der spontanen Magnetisierung sichere Messungen fehlten, habe ich E. Löwe neue Messungen über das Emissionsvermögen des blanken Nickels zwischen 100 und 450° C ausführen lassen. Die ε, T -Kurven für lange Wellen zeigen nun in der Tat die gleiche anomale Form wie die Widerstandskurve R, T (Fig. 1). Letztere ist quantitativ so gedeutet worden, daß die Anomalie δR gegen eine „ideale“ Kurve durch das Quadrat der spontanen Magnetisierung gegeben ist. Wie in einer ausführlichen,

vor kurzem abgeschlossenen Arbeit gezeigt werden wird, gilt für alle Nickelsorten die Beziehung

$$(2) \quad \frac{\partial R}{R_0} = \frac{R_{\text{ideal}} - R_{\text{beob.}}}{R_0} = b \sigma_0^2; \quad b = \sim 5 \cdot 10^{-4},$$

wenn mit R_0 der (eventuell wegen eines Restwiderstandes korrigierte) beobachtete Widerstandswert bei 0°C und mit σ_0 die spontane spezifische Magnetisierung bezeichnet wird.

Nimmt man an, daß die Hagen-Rubenssche Beziehung auch im Bereich des Ferromagnetismus gilt, so muß die Anomalie des Emissionsvermögens mit der des Widerstandes zusammenhängen:

$$(3) \quad \frac{\epsilon_{\text{ideal}}^2 - \epsilon_{\text{beob.}}^2}{\epsilon_0^2 \cdot \sigma^2} = b.$$

Hierin bedeutet $\epsilon_{\text{beob.}}$ das gemessene Emissionsvermögen bei den verschiedenen Temperaturen und ϵ_{ideal} eine ebenso wie beim Widerstand extrapolierte (in Fig. 1 gestrichelte) Gerade unter Benutzung der Werte von ϵ für 400 und 450° , zwischen welchen Temperaturen die ϵ , T -Kurve linear mit der Temperatur verlaufend gefunden wurde; ϵ_0 ist das durch Extrapolation erhaltene Emissionsvermögen bei 0°C .

In der folgenden Tabelle sind die zur Prüfung der Beziehung (3) erforderlichen Werte für zwei Wellenlängen eingetragen. Die ϵ -Werte sind in relativem Maß gegeben (der Umrechnungsfaktor $2 \cdot 10^{-4}$ fällt bei der Berechnung von b heraus), für $\epsilon_{\text{ideal}} - \epsilon_{\text{beob.}}$ ist $\delta \epsilon$ ($\epsilon_{\text{ideal}} + \epsilon_{\text{beob.}}$) gesetzt.

Tabelle 1

Temp. 0°C	σ^2	$\delta \epsilon$	$\epsilon_{\text{ideal}} + \epsilon_{\text{beob.}}$	$b \cdot 10^4$
$\lambda = 24 \mu; \quad \epsilon_0 = 98$				
100	2650	49	287	5,53
150	2400	42	305	5,56
200	2100	35	323	5,59
250	1650	26	342	5,61
300	1100	16	363	5,50
310	900	13	368	5,54
$\lambda = 8,7 \mu; \quad \epsilon_0 = 165$				
100	2650	80,5	453	5,02
150	2400	72	473	5,31
200	2100	63	493	5,44
250	1650	48,5	519	5,56
300	1100	30	550	5,48
310	900	25	556	5,65

Die Beziehung (3) ist also bei 24 und 8,7 — aber nicht mehr bei $6\ \mu$ — erfüllt¹⁾. b ist unabhängig von der Temperatur zwischen 100 und 310°. Oberhalb 310° bis zum sogenannten Curiepunkt und darüber hinaus bis zu 400° wachsen die b -Werte schnell an. Das gleiche zeigen aber auch die Widerstandsmessungen. Dies führt, wie in kurzem gezeigt werden wird, zu einer neuen wichtigen Erkenntnis: daß nämlich die spontane Magnetisierung²⁾ ebensowenig wie die ferromagnetischen³⁾ Magnetisierungsvorgänge am „Curiepunkt“ verschwinden. Die magnetische Anomalie des Emissionsvermögens zeigt also ebenfalls, daß sich noch oberhalb des bisher angenommenen Curiepunktes von ~ 350 bis zu $\sim 400^\circ$ der Ferromagnetismus bemerkbar macht.

Der aus der Tabelle folgende Absolutwert von $b = 5,5 \cdot 10^{-4}$ ist etwas größer als der aus den Widerstandsmessungen folgende. Die Größe $\delta\epsilon$ ist, nach der Meßgenauigkeit beurteilt, auf 2% unsicher. Die gleiche Unsicherheit haben die σ^2 -Werte. Dagegen kann die Genauigkeit von ϵ_0 (das im Quadrat eingeht) nicht angegeben werden: es ist durch Extrapolation der ϵ, T -Kurve erhalten unter der Annahme, daß die Krümmung zwischen 200 und 100° sich bis zu 0° fortsetzt. Es ist möglich, daß dieser Wert größer ist als der wirkliche ϵ_0 -Wert, so daß b kleiner würde. Aber allein die Feststellung, daß die ϵ, T -Kurve durch die gleiche Gesetzmäßigkeit wie die R, T -Kurve und durch fast die gleiche Konstante b mit der spontanen magnetischen Energie verbunden ist, beweist, daß Widerstand und Emissionsvermögen in gleicher Weise durch die spontane Magnetisierung beeinflusst werden.

Diese Folgerung wird noch erhärtet durch die Beobachtung, daß das Emissionsvermögen in der Umgebung des Curiepunktes von der wahren Magnetisierung abhängt: in einem starken Magnetfeld wird das Emissionsvermögen des Nickels herabgesetzt, z. B. am „Curiepunkt“ durch ein Feld von 4000 Gauss um 0,6%. Diese Verkleinerung $d\epsilon$ ist mit der von Englert gemessenen Verkleinerung des Widerstandes durch wahre Magnetisierung innerhalb der Meß-

1) Dieses plötzliche Aufhören der Gültigkeit der Gl. (1) folgt auch aus den Messungen von Rubens an normalen Metallen. Der niedrige b -Wert für 100° und 8,7 μ dürfte auch hierauf beruhen, daß Rubens bei tiefen Temperaturen ein früheres Versagen der Formel (1) als bei höheren Temperaturen beobachtet.

2) W. Gerlach, erscheint in Ann. d. Phys.

3) G. Scharff zeigt, daß sich bis zu 20° oberhalb des Curiepunktes noch eine ferromagnetische und außerdem zugabhängige Magnetisierung nachweisen läßt. (Vgl. Ann. d. Phys. [5] 25. S. 223. 1936.)

genauigkeit von $d\epsilon$, die im Mittel $0,1\%$ des Emissionsvermögens beträgt, gemäß

$$(4) \quad \frac{d\epsilon}{\epsilon} = \frac{1}{2} \frac{dR}{R}$$

in Übereinstimmung, wie Tab. 2 zeigt.

Tabelle 2

Feld in Oersted	beob. in %	ber. nach (4) in %
2000	$-0,27 \pm 0,05$	- 0,21
4000	$-0,60 \pm 0,05$	- 0,58

Über die Ausführung dieser Messungen und die einzelnen Ergebnisse berichtet E. Löwe in der folgenden Arbeit.

Zusammenfassung

1. Das Emissionsvermögen von Nickel zwischen 100 und 450°C zeigt qualitativ und nahezu quantitativ die gleiche Beziehung zur Energie der spontanen Magnetisierung wie der elektrische Widerstand.

2. Das Emissionsvermögen von Nickel wird durch wahre Magnetisierung herabgesetzt.

München, Physikalisches Institut der Universität, 26. November 1935.

(Eingegangen 28. November 1935)

Über das Emissionsvermögen des Nickels¹⁾**Von Erhard Löwe**

(Mit 8 Figuren)

Die Gesamtstrahlung und das spektrale Emissionsvermögen von Nickel wurde, jedoch ohne besondere Berücksichtigung der magnetischen Umwandlung am Curiepunkt ($\sim 620\text{--}630^\circ$ abs.) von Hagen und Rubens²⁾, Suydam³⁾, Schmidt und Furthmann⁴⁾ sowie von Kahanovicz⁵⁾ gemessen. In der *Gesamtemission* des Ni wurde von Schmidt und Furthmann keine Anomalie im Bereich von $600\text{--}800^\circ$ abs. gefunden, wohl aber von Suydam und Kahanovicz. In den Messungen von Hagen und Rubens des *spektralen* Emissionsvermögens (EV.) zeigt sich, vor allem bei längeren Wellen, die magnetische Umwandlung durch einen Wendepunkt deutlich an, jedoch liegen in diesem Temperaturbereich zu wenig Meßpunkte, um genaue Aussagen machen zu können. Alle diese Messungen wurden daher wiederholt.

Da die magnetische Umwandlung sich im EV. in gleicher Weise wie im Widerstand entsprechend der Hagen-Rubensschen Formel

$$E_\lambda = 0,0365 \sqrt{\frac{R}{\lambda}}$$

zeigte⁶⁾, wurde auch der Einfluß einer wahren Magnetisierung in der Umgebung des Curiepunktes auf die Emission untersucht. Es sollte geprüft werden, ob sich die von Gerlach⁷⁾ gefundene und späterhin genauer untersuchte Widerstandsverminderung durch die wahre Magnetisierung auch im EV. bemerkbar macht.

1) Dissertation, angenommen von der Philosophischen Fakultät II. Sektion der Universität München am 6. November 1935.

2) E. Hagen u. H. Rubens, Berl. Ber. S. 778. 1909; S. 467. 1910.

3) V. A. Suydam, Phys. Rev. **5**. S. 437. 1915.

4) H. Schmidt u. E. Furthmann, Mitt. aus Kais.-Wilh.-Inst. f. Eisenf. **10**. S. 225. 1928.

5) M. Kahanovicz, Lincei Rend. (5) **30**. S. 2, 132. 1921.

6) W. Gerlach, Ann. d. Phys. [5] **25**. S. 209. 1936.

7) W. Gerlach u. K. Schneiderhan, Ann. d. Phys. [5] **6**. S. 772. 1930; W. Gerlach, Ann. d. Phys. [5] **8**. S. 649. 1931; K. Schneiderhan, Ann. d. Phys. [5] **11**. S. 385. 1931; W. Gerlach, Ann. d. Phys. [5] **12**. S. 849. 1932; E. Englert, Ztschr. f. Phys. **74**. S. 748. 1932; Ann. d. Phys. [5] **14**. S. 589. 1932; H. H. Potter, Nature **127**. S. 555. 1931; Proc. Roy. Soc. London (A) **132**. S. 560. 1931.

I. Die Apparatur

Als Meßinstrument wurde ein Radiometer nach Angaben von Hettner¹⁾ gebaut. Fig. 1 zeigt einen Querschnitt. Das System, 2 runde (3 mm Durchmesser) Flügel *F* im Abstand von 9 mm und ein Ablesespiegel an einem horizontalen Balken, ist an einem von außen drehbaren Torsionskopf mittels Quarzfadens aufgehängt. Um eine möglichst große Temperaturdifferenz zwischen Vorder- und Rückseite des Flügels zu erhalten, wurde eine 3μ -Aluminiumfolie nach Tears²⁾ Angaben auf ein Stück Glimmer von 1–2 μ Stärke

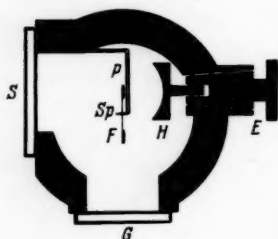


Fig. 1. Querschnitt durch das Radiometer

gekittet, der vorher zur Rotglut erhitzt war; er wird dadurch rissig und hat so eine sehr schlechte Wärmeleitfähigkeit. Der zu bestrahlende Flügel ist mit einer Mischung aus Ruß und Amylacetat, dem eine Spur Zaponlack beigemischt wird, geschwärzt. Diese Bauart erwies sich als gleichwertig dem doppelwandigen Tearschen Flügel, der gegen Stöße sehr empfindlich war. Hinter dem bestrahlten Flügel befindet sich die Zaponlackhaut *P*³⁾. Der Ablesespiegel war $1,5 \times 2$ mm groß und hatte eine Dicke von 0,1 mm, das Gewicht des ganzen Systems betrug 7 mg. Die Strahlung fällt durch eine planparallele Sylvinplatte *S* von 3 mm Dicke auf den Hohlspiegel *H*, vorbei an dem Radiometerflügel *F*. *H* besteht aus massivem mit einer hauchdünnen Zaponlackhaut⁴⁾ überzogenem Silber. Er konzentriert die Strahlung auf den einen Flügel, der sich ungefähr in seinem Brennpunkt befindet. Zur Justierung war der Hohlspiegel *H* durch Drehen an den Schliff *E* und Transport in einem Gewinde vor- und rückwärts verschiebbar. Die Ablesung des Spiegels geschah

1) G. Hettner, Ztschr. f. Phys. **27**, S. 12. 1924; **47**, S. 499. 1928.

2) J. D. Tear, Phys. Rev. **23**, S. 641. 1924.

3) Das Zaponlackhäutchen *P* war nach dem Verfahren von v. Angerer hergestellt. Es hat die Funktion der von Nichols angegebenen festen Gegenplatte; sie erhöht die Empfindlichkeit des Instrumentes. Die Anwendung von Zaponlack konnte ohne Bedenken geschehen; nach Messungen von v. Angerer hat Zaponlack nur in der Nähe von 8μ einige Absorptionsbanden, sonst sinkt die Durchlässigkeit nirgends unter 80%. Die Absorptionsstellen störten jedoch nicht bei der Messung des EV. bei 8μ .

4) Diese hatte folgenden Grund: Das System *Sp* zeigte Störungen durch elektrische Aufladungen. Diese wurden durch das Einbringen eines radioaktiven Präparates beseitigt. Dadurch überzog sich die Oberfläche des Spiegels mit einer Oxydschicht. Dies wurde durch die Lackierung verhindert.

durch das Fenster *G*. Das Instrument war sorgfältig gegen äußere Einflüsse durch Verkleidung mit Watte geschützt. Der günstigste Druck wurde zu 0,012 mm ermittelt. Die größte erreichte Empfindlichkeit war $280 \cdot t^2$ Skalenteile. Hettner gibt zu seinem Instrument $250 \cdot t^2$ Skalenteile an, bezogen auf 1 HK in 1 m Abstand sowie 1 m Skalenabstand. Für die Messungen wurden je nach dem Spektralbereich Systeme mit Empfindlichkeiten von 4640 bis 10 100 mm Ausschlag pro HK verwendet. Die Empfindlichkeit wurde teils durch Wahl des Quarzfadens, teils durch Veränderung des Druckes variiert. Die Systeme waren nahezu aperiodisch, sie hatten gerade noch einen deutlichen Umkehrpunkt. Systeme mit noch größerer Empfindlichkeit — es wurden solche, die schon Brownsche Bewegung zeigten, gebaut — waren wegen zu langer Schwingungsdauer nicht geeignet. Es wurde geprüft, daß im Bereich bis zu 1000 Skt. der Ausschlag der Energie proportional war.

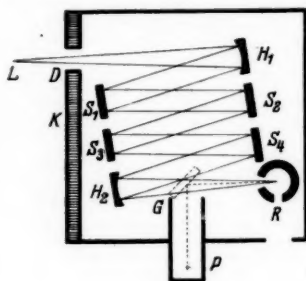
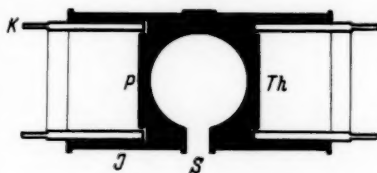


Fig. 2.

Die Reststrahlenanordnung

Fig. 3. Der Strahlungskörper,
ohne Magnetfeld

Die Anordnung geht aus Fig. 2 hervor. Vom strahlenden Körper *L* ging die Strahlung durch die Blende *D*, die durch eine mit fließendem Wasser gekühlte Klappe verschließbar war, über den Hohlspiegel *H*₁, die Reststrahlenplatten *S*₁ bis *S*₄ und den Hohlspiegel *H*₂ in das Radiometer. Bei *P* befand sich eine Glühlampe, die über den beweglichen Spiegel *D* das Radiometer *R* bestrahlen konnte. Es war dies eine künstlich gealterte Lampe, die mit konstant gehaltener Unter Spannung gebrannt wurde. Sie diente dazu die Empfindlichkeit des Radiometers zu kontrollieren, was nach jeder Meßserie geschah. *K* ist eine Wand, die dauernd mit fließendem Wasser gekühlt wurde. Die ganze Anordnung war mit Watte und Stanniol aufs sorgfältigste gegen äußere Einflüsse geschützt.

Der Strahlungskörper (Fig. 3) war ein zylindrischer Kupferblock von 10 cm Länge. Die beiden Stirnflächen waren 2,5 cm tief ausgedreht. In dieser Höhlung ist auf der einen Seite die emittierende

1 mm starke glänzend polierte Nickelplatte P von 45 mm Durchmesser mit einem Klemmring eingepreßt. Auf der anderen Seite befindet sich eine gleiche Platte, auf der ein Silber-Konstantan-Thermoelement Th aufgelötet war. Rings um den Block war die Heizwicklung J gewickelt, nach außen mit Asbest gut wärmeisoliert. Im Strahlengang wurde aus der Platte der mittlere Bereich von 20 mm ausgeblendet. Die Mitte des Kupferblockes diente als schwarzer Körper mit der Öffnung S . K sind zylindrische Kühlmäntel; sie wurden mit fließendem Wasser durchspült und hielten

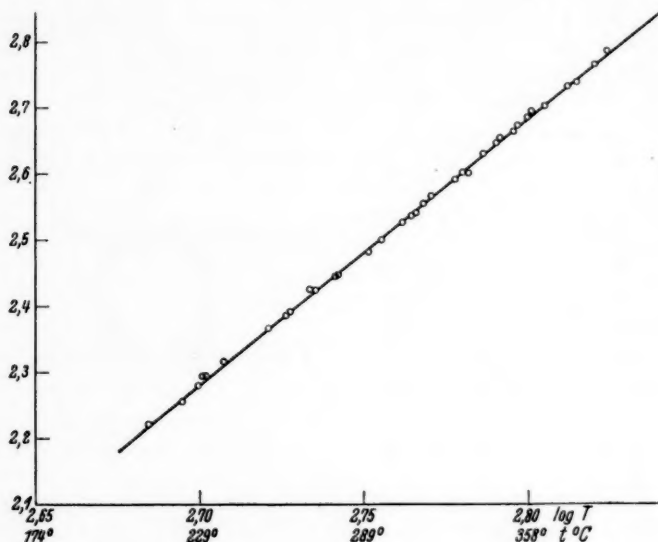


Fig. 4. Gesamtstrahlung des schwarzen Körpers

die von den Ofenwänden kommende Strahlung fern. Um zu prüfen, ob die Temperatur von P und Th im Betrieb gleich war, wurde auf P ebenfalls ein Thermoelement aufgelötet. Beide wurden gegeneinander kompensiert. Die größte auftretende Temperaturdifferenz war 2°C . Eine Oxydation der strahlenden Nickelplatte ließ sich durch getrockneten Stickstoff, der mittels einer Kapillare dauernd in den Raum vor P eingeblasen wurde, vollständig verhindern. Der Stickstoff wurde auf die jeweilige Temperatur des Ofens geheizt, so daß eine Abkühlung des Ni-Strahlers durch den Stickstoffstrom vermieden wurde. Der H_2O -Dampf der Zimmerluft

wurde konstant gehalten, um Fehler durch wechselnde Absorption zu vermeiden ¹⁾.

Die Erzeugung monochromatischer Strahlung geschah mittels Reststrahlen von Kalkspat ($6,7 + 11,4 + 29 \mu$), Gips ($8,7 + 30 \mu$) und Flußspat ($24 + 31,6 \mu$). Um die Emission im kurzwelligen Ultrarot zu messen, wurde die Gesamtstrahlung mit Quarz, der über $4,5 \mu$ undurchlässig ist, gefiltert.

II. Messung der Gesamtemission

Zur Prüfung der Apparatur wurde zunächst die Emission des schwarzen Körpers S als Funktion von T gemessen und mit einer

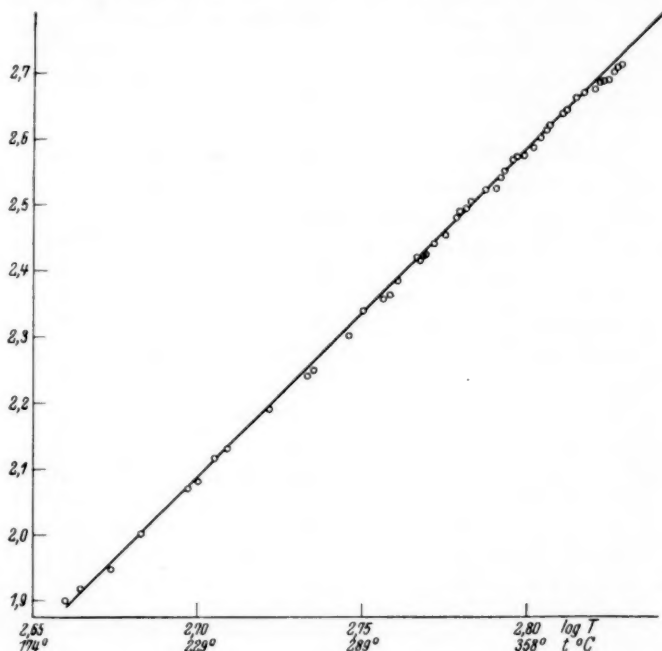


Fig. 5. Gesamtstrahlung des Nickels

berechneten Kurve verglichen. Sodann wurde die Gesamtemission des Nickels gemessen. Der Wert jedes Kurvenpunktes der Figg. 4 und 5 ist ein Mittelwert aus je 6 einzelnen Ablesungen. Die Ab-

1) W. Gerlach, Ann. d. Phys. 50. S. 233. 1916.

weichungen der Einzelwerte untereinander betrugen bis zu 1,3%. Messungen an verschiedenen Tagen konnten mit eben dieser Genauigkeit reproduziert werden.

Während die Meßpunkte des schwarzen Körpers in logarithmischer Darstellung eine Gerade bilden, zeigt die gleichartige Nickelkurve Abweichungen von einer Geraden, welche die Meßgenauigkeit überschreiten, und zwar liegen — wenn wie (willkürlich) in Fig. 5 die Werte um 200° und 360° für eine Gerade gewählt sind — die Punkte von 240 – 300° und dann wieder über 380° zu tief.

Es macht sich also nicht allein das Curiepunktsgebiet bemerkbar; vielmehr folgt die Temperaturabhängigkeit auch schon bei tiefer Temperatur *nicht* einem T^n -Gesetz: n ist abhängig von der Temperatur. Diese Anomalie der Strahlungstemperaturkurve kommt in viel stärkerem Maße zur Geltung, wenn nicht die Gesamtstrahlung, sondern die monochromatische Emission bei langen Wellen betrachtet wird.

III. Messungen in verschiedenen Wellenlängenbereichen

Mit der vorher beschriebenen Reststrahlenanordnung wurde nun die Emission in verschiedenen Gebieten gemessen. Da es unmöglich war, die Strahlung des schwarzen Körpers und des Nickels bei genau den gleichen Temperaturen hintereinander zu messen, wurden die Isochromaten einzeln aufgenommen und zur Berechnung des EV. die zu gleichen Temperaturen gehörenden Werte aus den Kurven interpoliert. Die Meßpunkte wurden zwischen 250° und 400° C sehr dicht gelegt.

Fig. 6 zeigt die Isochromaten für die Wellenlängen $< 4,5 \mu$, 6μ , $8,7 \mu$ und 24μ in Abhängigkeit von der Temperatur. Während das Emissionsvermögen für $\lambda < 4,5 \mu$ innerhalb der Meßgenauigkeit linear mit der Temperatur ansteigt, macht sich mit steigender Wellenlänge eine in zunehmendem Maße ausgeprägte Anomalie bemerkbar: die E_λ -Kurve wird gekrümmt und hat im Bereich von 350° , dem Curiepunktsbereich, einen Wendepunkt. Die Form der E_λ -Kurve bei $8,7 \mu$ und 24μ entspricht bereits durchaus der des elektrischen Widerstandes¹⁾.

IV. Der Einfluß einer wahren Magnetisierung auf das Emissionsvermögen

In den Innenraum einer eisenfreien Spule, die ein Feld von 4700 Oersted lieferte²⁾, wird ein elektrischer Ofen zur Heizung eines

1) Bez. der theoretischen Auswertung vgl. W. Gerlach, Ann. d. Phys. [5] 25. S. 209. 1936.

2) G. Gerloff u. E. Löwe, Ztschr. f. Phys. (im Druck).

Nickelstabes von 8 cm Länge und 2 cm Durchmesser gebracht. Die glänzend polierte Stirnseite diente als strahlende Fläche. Durch gekühlte zylindrische Rohrblenden wurde gesorgt, daß nur die Strahlung der Nickelfläche auf das Radiometer fiel. Auf der Rückseite des Nickelblockes befand sich ein Thermoelement. Die Heizwicklung des Ofens war bifilar ausgeführt. Das Rohr des

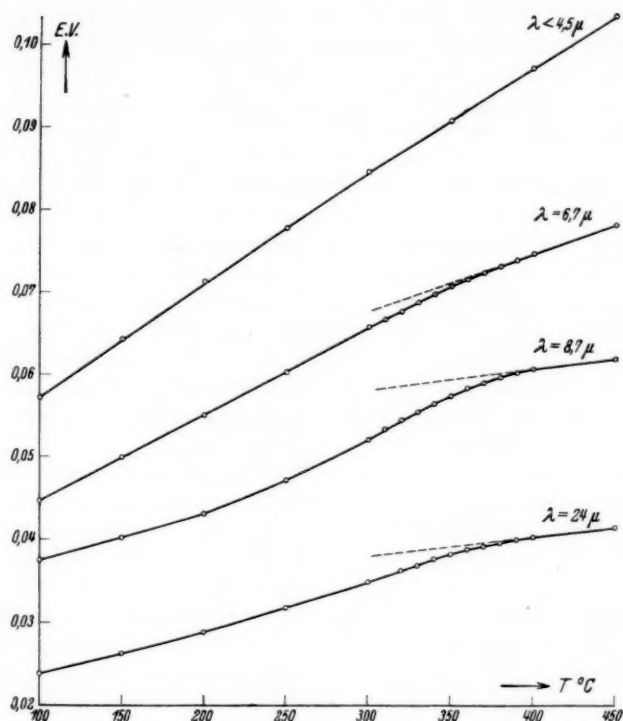


Fig. 6. Spektrales Emissionsvermögen von Nickel

Ofens war mit einer Sylvanplatte abgeschlossen und mit etwa $\frac{1}{10}$ mm Stickstoff gefüllt. Das Magnetfeld konnte beliebig lange konstant gehalten werden. Unter Berücksichtigung des Entmagnetisierungsfaktors und der Korrektur für die Inhomogenität des Feldes ergab sich an der strahlenden Fläche eine Feldstärke von rund 4000 Oersted.

Da das Radiometersystem durch das Streufeld der Spule abgelenkt wurde, wurde in seiner Nähe ein Solenoid so angebracht, daß das Streufeld der Hauptspule vollständig kompensiert war. Zur Sicherheit wurde jede Messung mit kommutierten Feldern wiederholt. Da die zu erwartenden Änderungen des EV. sehr klein waren, wurde die Ablesung mittels eines Glühfadens, der über den Radiometerspiegel in ein Mikroskop abgebildet war, gemacht. Das Mikroskop war durch eine Mikrometerschraube seitlich verschiebbar, die Verschiebungen konnten mit einem zweiten Meßmikroskop gemessen werden. Auf diese Art konnten Ausschläge von $\frac{1}{10}$ mm abgelesen und solche von $\frac{1}{100}$ mm einwandfrei geschätzt werden.

Bei einem Vorversuch wurde entgegen der Erwartung eine Änderung der Gesamtemission bei einer Temperatur von rund 350° durch Erregen des Magnetfeldes beobachtet, und zwar eine Zunahme der Emission. Sie war aber offenbar hervorgerufen durch die Erwärmung des Nickels durch den magnetokalorischen Effekt. Dies wurde auch bewiesen durch Messung der Temperatur des Nickelblockes mittels Thermoelement und Kompensationsmethode: es ergab sich bei 347°C und einer Feldstärke von 3000 Gauss eine Temperaturerhöhung von $0,26^{\circ}$. Nach Abklingen des magnetokalorischen Effektes ging das Radiometer auf die ursprüngliche Stellung zurück: ein Einfluß der Magnetisierung auf das Gesamtemissionsvermögen ist nicht festzustellen.

Sodann wurde das EV. für lange Wellen gemessen unter Zwischenschaltung eines Filters zwischen Strahler und Meßinstrument¹⁾. Das Filter bestand aus einer Zaponlackhaut, die so stark berußt war, daß sie für sichtbares Licht undurchsichtig war. Für Wellenlängen über $8-10\mu$ war es hinreichend durchlässig. Es ergab sich jetzt bei Erregung des Feldes zunächst wieder die Zunahme der Strahlung durch den magnetokalorischen Effekt. Nach dessen Abklingen blieb eine konstante Ablenkung in entgegengesetzter Richtung übrig. Nach Ausschaltung des Feldes zeigte sich zuerst eine stärkere Abkühlung, schließlich stellte sich das Radiometer aber wieder auf seinen Nullpunkt ein. Es ergibt sich also durch Magnetisierung eine Abnahme des Emissionsvermögens, deren Verlauf in Abhängigkeit von der Temperatur in Fig. 7 für $H \sim 4000$ Gauss und in Fig. 8 für $H = 2000$ Gauss wiedergegeben ist. Die eingezeichneten Werte sind Mittelwerte aus je 2–3 Einzelmessungen, die untereinander Abweichungen bis zu $\pm 0,075\%$ des Gesamtausschlages zeigten, ent-

1) Aussonderung monochromatischer Strahlung durch Reststrahlen erwies sich für diese Messungen als zu intensitätsschwach.

sprechend dem in der Figur eingezeichneten Doppelpfeil. Aus der Beziehung von Hagen und Rubens erhält man

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{1}{2} \frac{\Delta R}{R}.$$

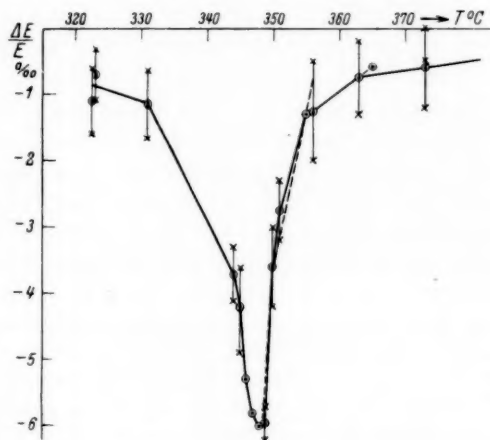


Fig. 7. Abnahme des Emissionsvermögens für lange Wellen durch ein Feld von 4000 Gauss

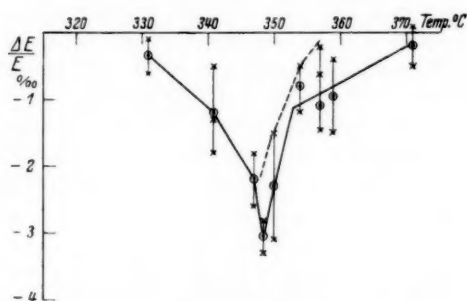


Fig. 8. Abnahme des Emissionsvermögens für lange Wellen durch ein Feld von 2000 Gauss

Berechnet man nach den Angaben von E. Englert¹⁾ ($\Delta R/R$) für die wahre Magnetisierung bei den gleichen Feldern, so erhält man

1) E. Englert, Ztschr. f. Phys. 74. S. 748. 1932.

die punktierten Kurven¹⁾, welche durchaus in den Streubereich der gemessenen $\Delta E/E$ -Werte fallen.

V. Ergebnis

Durch wahre Magnetisierung in der Nähe der magnetischen Umwandlung tritt eine Abnahme des optischen Emissionsvermögens ein, die der aus der Hagen-Rubenschen Beziehung und der beobachteten Widerstandsabnahme berechneten entspricht.

Die vorstehende Arbeit wurde auf Anregung und unter Leitung von Herrn Prof. Dr. W. Gerlach im Physikalischen Institut der Universität München ausgeführt. Ich möchte auch an dieser Stelle Herrn Prof. Gerlach meinen herzlichen Dank aussprechen für seine wertvollen Ratschläge und sein stetes Interesse. Auch Herrn Prof. Schütz bin ich für seine andauernde Hilfsbereitschaft aufrichtig dankbar.

1) Der CP. des Englertschen Materials wurde auf das Maximum der Emissionsänderung verlegt. Beide Materialien bestanden aus Ni + 0,6% Mn, das hier verwendete zeigte außerdem geringe Verunreinigungen durch Co und Fe.

München, Physikalisches Institut der Universität, München 1935.

(Eingegangen 28. November 1935)

Über den Einfluß des Zuges auf die Magnetisierung oberhalb des Curiepunktes

Von Gertrud Scharff

(Mit 8 Figuren)

Es ist lange bekannt, daß die Feldabhängigkeit der *äußeren* „ferromagnetischen“ Magnetisierung¹⁾ sowohl durch die mechanische Vorbehandlung des Materials, als auch durch elastische Deformation stark beeinflußt wird. Von den mannigfaltigen Effekten kann einer als sicher erkannt angesehen werden: die Theorie von R. Becker²⁾ über die Magnetisierung von Nickel unter Zug und Druck, die sowohl mit magnetischen Messungen als auch mit Messungen des elektrischen Widerstands in Übereinstimmung befunden wurde³⁾, fordert einen eindeutigen Zusammenhang zwischen der Anfangsuszeptibilität von Nickel und einer (genügend starken) Zugspannung.

Daher lag es nahe, nach einer Spannungsabhängigkeit der „wahren“ Magnetisierung zu fragen. Da jedoch die technische Sättigung bei Zimmertemperatur erst bei relativ hohen Feldern völlig erreicht ist und durch wahre Magnetisierung nur einen äußerst geringen (bis in die Nähe des C.P. dem Feld proportionalen) Zuwachs erhält⁴⁾, ist dieses Gebiet wegen zu großer experimenteller Schwierigkeiten für die Lösung der Aufgaben nicht geeignet.

Bei höherer Temperatur — im Bereich des CP. — liegt der ferromagnetische Magnetisierungsvorgang zum allergrößten Teil schon im Bereich kleiner Feldstärken; gleichzeitig wird die wahre Magnetisierung größer, so daß ein Zugeinfluß auf sie schon bei

1) P. Weiss pflegt diese als „aimantation apparente“ zu bezeichnen, d. h. die „in Erscheinung tretende“ Magnetisierung; im Gegensatz zur „aimantation spontanée“, der spontanen, unterhalb des CP. vorhandenen inneren Magnetisierung; ihr Wert ist gleich dem der technischen Sättigung. Als „wahre“ Magnetisierung bezeichnen wir die Vergrößerung der inneren Magnetisierung über den ferromagnetischen Sättigungswert durch äußere (meist hohe) Felder.

2) R. Becker, Ztschr. f. Phys. **62**. S. 253. 1930; **64**. S. 660. 1930.

3) Auch die Übertragung der Beckerschen Theorie auf tordierten Draht durch E. Englert liefert Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment (Matteucci-Effekt). Ztschr. f. Phys. **97**. S. 83. 1935.

4) Bei Z. T. etwa $1,5 \cdot 10^{-4}$ Oe/Oe in Feldern bis zu 25000 Oe; P. Weiss u. R. Forrer, Ann. de Phys. [X], **5**. S. 153. 1926.

Feldern von einigen hundert Oersted gesondert zu beobachten sein müßte.

Bezüglich der Abhängigkeit des CP. von der Spannung muß zunächst definiert werden, was hier als CP. bezeichnet werden soll; ohne damit die Weiss'sche Annahme zu verbinden, daß am CP. die spontane Magnetisierung vollständig verschwindet, wird die aus der Weiss'schen Darstellung folgende Definition des CP. benutzt, daß er nämlich nahe übereinstimmt mit der Stelle stärkster Neigung der J, t -Kurven bei Feldern von einigen hundert Oersted. Die so definierte CP.-Temperatur stimmt mit dem Maximum der spezifischen Wärme, dem Maximum des magnetokalorischen Effekts und dem Maximum des Temperaturkoeffizienten des Widerstandes (bei den meisten bisher untersuchten Nickelsorten) überein.

Zur Darstellung der in dieser Hinsicht unternommenen Versuche eignet sich am besten das J, t -Diagramm: die Magnetisierung J wird bei verschiedenen Zugspannungen und bei verschiedenen Feldstärken gemessen, die J -Werte werden als Funktion der Temperatur aufgetragen. Die technische Sättigungsmagnetisierung J_∞ ist gleich der spontanen Magnetisierung J_0 bei der betreffenden Temperatur, Z sei der Zug, Θ der CP. Für die Abhängigkeit der wahren Magnetisierung von einer angelegten Zugspannung ($J(Z)$) in der Umgebung des CP. bei Feldern $H > H_\infty$, d. h. nachdem die technische Sättigung schon erreicht ist, ergeben sich nun mehrere Möglichkeiten, zwischen welchen das Experiment entscheiden soll:

$$(1) \quad \frac{\partial J}{\partial Z} = 0; \quad \text{daher auch} \quad \frac{\partial \Theta}{\partial Z} = 0,$$

d. h. die wahre Magnetisierung ist durch elastische Deformation nicht zu beeinflussen.

$$(2) \quad \frac{\partial J}{\partial Z} \neq 0; \quad \frac{\partial \Theta}{\partial Z} = 0;$$

in diesem Fall würde nur die J, H -Kurve im Bereich stärkerer Felder und die Ordinate der J, t -Kurve, aber nicht die Stelle steilsten Abfalls der J, t -Kurve in bezug auf die Temperaturachse verrückt. Bei einer eventuellen Kopplung zwischen wahrer Magnetisierung und ferromagnetischer Magnetisierung oberhalb des CP. könnte $\partial J / \partial Z$ sich oberhalb und unterhalb des CP. verschieden verhalten. Z. B. könnte, wie in Fig. 1 A dargestellt, gelten:

$$\frac{\partial J}{\partial Z} = 0; \quad \text{für } t < \Theta;$$

$$\frac{\partial J}{\partial Z} \geq 0; \quad \text{für } t > \Theta.$$

Man wäre dann gezwungen, wahre Magnetisierung oberhalb und unterhalb des CP. begrifflich zu unterscheiden.

$$(3) \quad \frac{\partial J}{\partial Z} \neq 0; \quad \frac{\partial \Theta}{\partial Z} \neq 0;$$

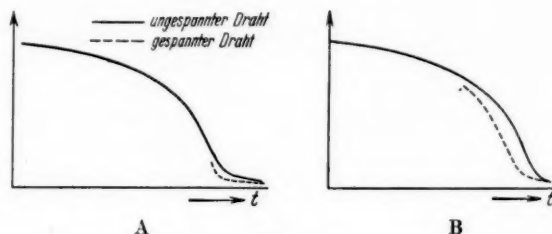


Fig. 1

Dieser Befund (Fig. 1B) würde den Mechanismus der wahren Magnetisierung mit der elastischen Verspannung des Gitters (Änderung der Gitterkonstante oder der Textur) in Beziehung zu bringen gestatten.

Hier kurz das Ergebnis: Da die experimentelle Prüfung den Fall 1) ergibt, liefert die J - t -Messung die Möglichkeit zu unterscheiden, ob eine beobachtete Magnetisierung zur ferromagnetischen (technischen) Sättigungskurve gehört oder zur wahren Magnetisierung. Diese hierdurch gegebene Möglichkeit wird ausgenutzt zur Feststellung, daß oberhalb des CP. in der üblichen, oben gegebenen Definition noch ferromagnetische Eigenschaften nachweisbar sind.

Methode

Zur Messung der Magnetisierung wurde dieselbe Apparatur wie zur Messung der Anfangsmagnetisierung verwendet¹⁾. Als Spannvorrichtung diente eine Messingfeder, mit welcher auf die Drähte ein Zug bis zu 8,3 kg/mm² ausgeübt werden konnte. Untersucht wurde vakuumgeschmolzener Carbonsnickeldraht von Heraeus, der auf 0,7 mm Durchmesser gezogen und dann im Vakuum bei etwa 900°C gegläht wurde (Ni I), sowie vakuumgeschmolzenes Nickel mit einem Zusatz von 0,6% Mn, ebenfalls vakuumgegläht (Ni II).

Zur Beobachtung der Magnetisierung in der Nähe des CP. können unbedenklich Kommutierungskurven aufgenommen werden, da die Hysteresis praktisch verschwindet. Grundbedingung ist hohe räumliche und zeitliche Temperaturkonstanz. Für jede Temperatur wurde die Magnetisierung mehrmals bei 6—12 Feldstärken zwischen

1) G. Scharff, Ztschr. f. Phys. 97. S. 73. 1935.

90 und 930 bzw. 4,6 und 930 Oe beobachtet. Nur Meßreihen, bei denen sich die Einzelwerte um weniger als 0,2 Oe unterschieden, wurden benutzt. Das Magnetfeld H wurde aus den Dimensionen der

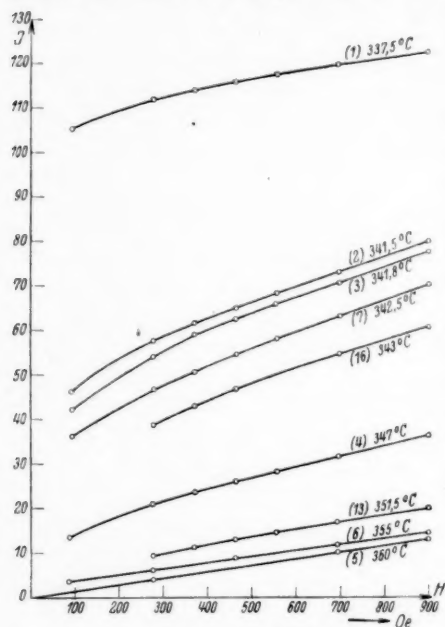


Fig. 2. Magnetisierungskurven des ungespannten Drahtes (Ni II)

waren, wurde der Draht steigenden Zugspannungen unterworfen (Ni I: 7,1 kg/mm²; Ni II: 3,2, 6,0, 8,3 kg/mm²). Bei jeder Spannung wurden mehrere Magnetisierungskurven im Gebiet steilsten Abfalls gemessen. Ordinate J : Moment pro cm³ (Oe).

Ergebnisse

Es besteht ein wesentlicher Unterschied zwischen dem Verhalten der Magnetisierung in schwachen und in starken Feldern, in ersteren zeigt sich ein ausgesprochener Zügeinfluß, bei letzteren keiner innerhalb der Meßgenauigkeit, wie Figg. 3—5 zeigen.

Fig. 3 (Ni II): Bei 930 Gauss zeigt sich kein Einfluß bei der erzielten Meßgenauigkeit bis zu 8,3 kg/mm² (zwischen 312 und 369 °C).

1) Die eingeklammerten Ziffern geben die Reihenfolge der Meßreihen; es wurde niemals eine thermische Nachwirkung beobachtet.

8,3 kg/mm² ist die obere mögliche Grenze der Zugbelastung für die benutzten Temperaturen, da sonst die Elastizitätsgrenze des Materials überschritten würde.

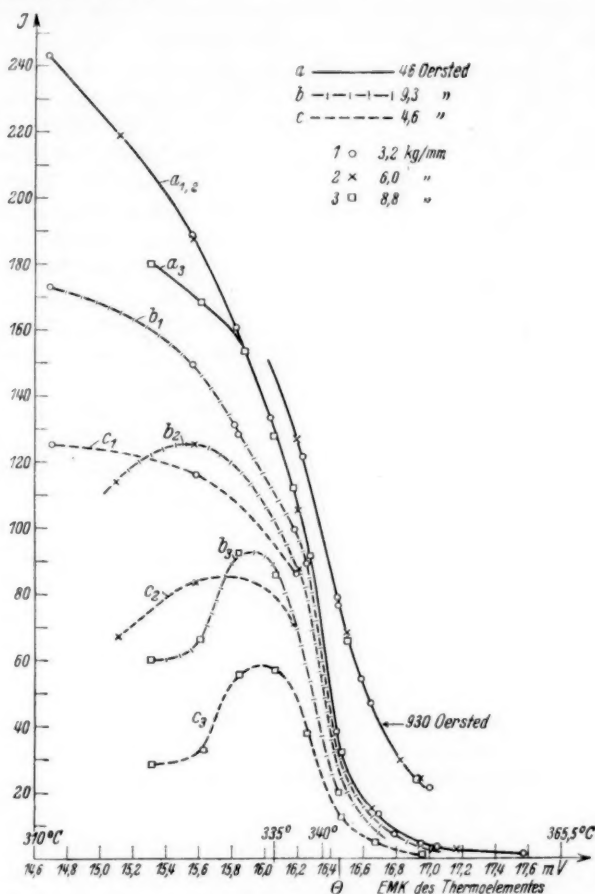


Fig. 3. Magnetisierung von Ni II bei variabler Feldstärke und Spannung als Temperaturfunktion in der Umgebung des Curiepunktes

Bei 46 Gauss verschwindet der Zugeinfluß 10° unterhalb des CP., ist aber bei tieferen Temperaturen noch vorhanden. Bei 9,3 und 4,6 Gauss besteht ein ganz starker Zugeinfluß; die J - t -Kurven zeigen unterhalb des CP. ein Maximum, das mit wachsendem Zug schmaler wird.

Fig. 4 (Ni II) zeigt das Gebiet oberhalb des CP. θ in vergrößertem Maßstab: bei einem Feld von nur 4,6 Oe ist bis zu $(\theta + 12)^\circ$ ein Spannungseinfluß sicher meßbar: mit wachsender Spannung nimmt die durch das Feld von 4,6 Oe erreichte Magnetisierung ab.

Die Messungen mit Ni I zeigten qualitativ das gleiche Verhalten. Jedoch besteht in der Magnetisierung bei höheren Feldern

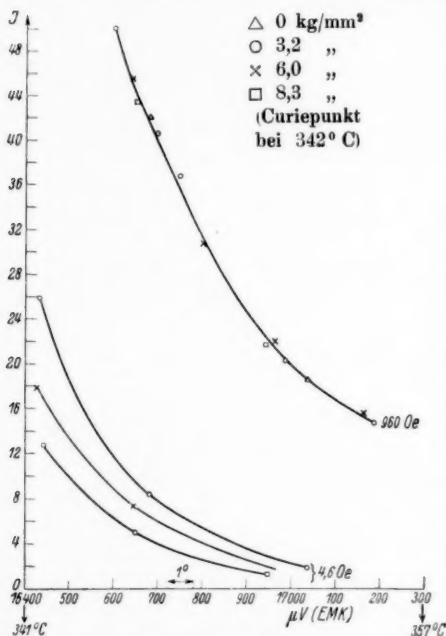


Fig. 4. Spannungsabhängigkeit der Magnetisierung über dem Curiepunkt (Ni II)

ein ausgesprochener Unterschied, der offenbar auf der verschiedenen Materialbeschaffenheit, nicht in zufälligen Härteunterschieden beruht.

Um diese Verschiedenheit zu zeigen, ist in Fig. 5 die mittlere Neigung der (J, H) -Kurven zwischen 280 und 930 Oe — aus den in diesem Gebiet praktisch linearen Isothermen der Fig. 2 berechnet — für Ni I und Ni II eingetragen; und zwar so, daß die CP. θ (342° für Ni II und 354,5° für Ni I) auf die gleiche Stelle der Abszisse gelegt wurden, während die Ordinatenwerte absolute dJ/dH -Werte sind.

Ein weiterer Unterschied zwischen Carbo-
 nylnickel I und Mangannickel II ergibt sich aus Fig. 6, in welcher die spannungsunabhängigen Magnetisierungskurven zwischen 93 und 930 Gauss als Funktion der Temperatur aufgezeichnet sind. Die Abszissen sind wieder so verschoben, daß die CP.-Werte zusammenfallen. Man sieht, daß bei gleichen Feldern der Carbonyldraht oberhalb des CP. und unmittelbar unterhalb des CP. eine beträchtlich höhere Magnetisierung annimmt, während etwa 20° unterhalb des CP. die Unterschiede ziemlich verschwinden. (Bei Zimmertemperatur ist die Sättigung des Mangannickels sogar einige Prozent höher als die des Carbo-
 nylnickels).

Diese Beobachtungen liefern folgende Tatsachen:

a) Der noch 12° oberhalb des CP. nachweisbare Spannungseinfluß auf die Größe der Magnetisierung bei schwachen Feldern beweist, daß hier noch eine spontane Magnetisierung und normale ferromagnetische Drehprozesse vorhanden sind; denn die Magnetisierbarkeit wird ebenso wie bei tiefen Temperaturen durch Zug herabgesetzt¹⁾.

b) Unterhalb des CP. macht sich der gleiche Spannungseinfluß auf die Magnetisierung bei um so größeren Feldern bemerkbar, je tiefer die Temperatur ist: die ferromagnetische Sättigung wird mit abnehmender Temperatur erst bei immer höheren Feldern erreicht.

c) Die Wendepunkte der J, t -Kurven liegen von 100 und 930 Gauss unabhängig von der Spannung mit einer unsystematischen Schwankung von $\pm 1/4^\circ$ bei der gleichen Temperatur, und zwar für Ni I bei $354,5^\circ \text{C}$, für Ni II bei 342°C . Die Veränderung der spontanen Magnetisierung und des CP. durch die benutzten Zugspannungen ist also, wenn überhaupt vorhanden, *sehr* klein; die CP.-Verschiebung ist sicher weniger als $1^\circ \text{C}^2)$. Diese rein magnetisch gemachte Feststellung ist in Übereinstimmung mit Englerts³⁾ Messungen des elektrischen Widerstandes.

d) Die Magnetisierung in höheren Feldern ($\sim 300\text{--}930 \text{ Oe}$) unterhalb und oberhalb des CP., welche wesentlich schon „wahre“ Magnetisierung ist, ist bezüglich ihres Absolutwertes und ihrer Feldabhängigkeit unabhängig vom Zug (vgl. die Meßpunkte in Fig. 5).

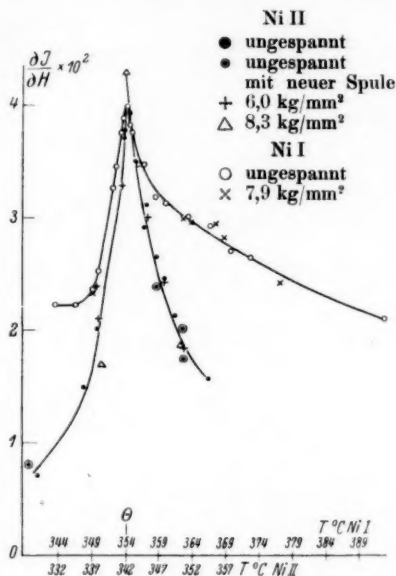


Fig. 5

1) G. Scharff, a. a. O.

2) Dies ist bemerkenswert im Vergleich zu dem großen Einfluß des geringen Manganzusatzes auf den CP., der 12° beträgt.

3) E. Englert, Ztschr. f. Phys. 97. S. 94, 1935.

Diese vier Ergebnisse beweisen die Unabhängigkeit der spontanen und wahren Magnetisierung von einer elastischen Verspannung des Nickels und zeigen, daß noch weit oberhalb des sogenannten „Curiepunktes“ durch schwache Felder eine normale ferromagnetische Magnetisierung erzeugt¹⁾ wird.

Die Abhängigkeit der Anfangsmagnetisierung J von Ni II als Funktion des Zugs für gleiche Magnetisierungsfeldstärke ergibt sich

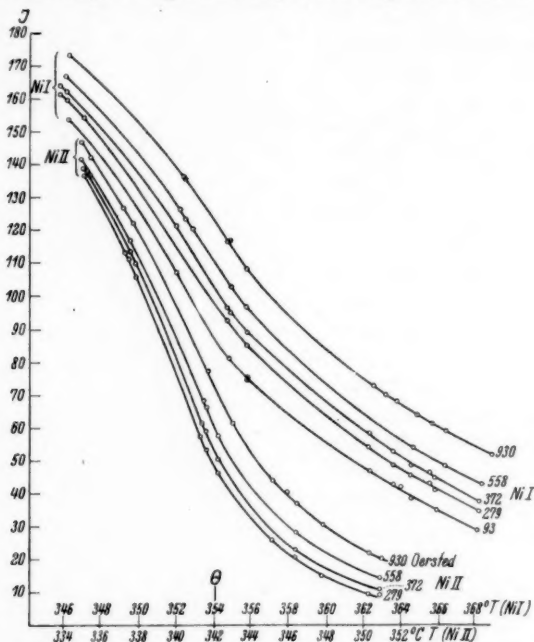


Fig. 6. Magnetisierungskurven (Parameter: Feldstärke)

aus Fig. 7, in welcher J für 4,6 Oe gegen $1/Z$ aufgetragen ist; die Ordinate ist also proportional der Anfangssuszeptibilität α_0 . Fig. 7 zeigt somit, daß bei größerem Zug für die Anfangssuszeptibilität auch oberhalb des „Curiepunktes“ die Beckersche Beziehung

$$\alpha_0 \sim \frac{1}{Z}$$

1) Dies folgt auch aus den früheren Messungen von Gerlach und Schneiderhan, sowie von E. Englert (Ztschr. f. Phys. **74**, S. 748, 1932) aus der Änderung des Widerstandes durch Magnetisierung oberhalb des „CP.“. Vgl. ferner H. H. Potter, Proc Roy. Soc. A **146**, S. 362, 1934, sowie W. Gerlach, Phys. Ztschr. **33**, S. 953, 1932, wo dasselbe aus dem Verlauf der R, T -Kurve geschlossen wird.

gilt. Die Genauigkeit, mit welcher diese Beziehung erfüllt ist, zeigt die Tabelle, in welcher das Verhältnis der gemessenen J -Werte bei 6 und 8,3 kg/mm² für die Meßtemperaturen zusammengestellt ist. Sie entspricht der Meßgenauigkeit von Zug und Magnetisierungsausschlag.

Ordinate: Magnetisierung bei 4,6 Oe
Abszisse: reziproker Zug

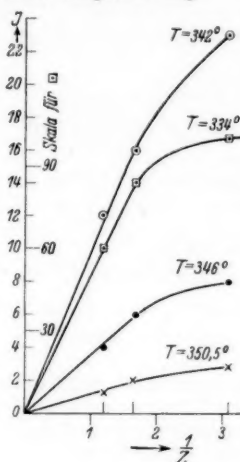


Fig. 7

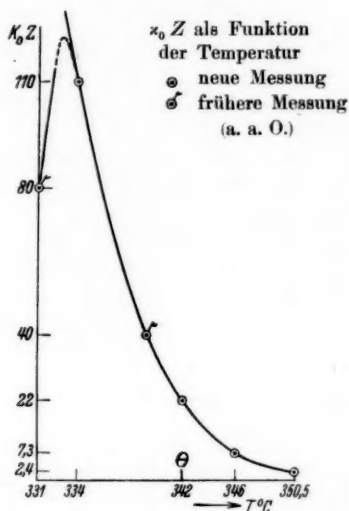


Fig. 8

Temperatur	331 °C	334 °	342 ° (Θ)	346 °	350,5 °
$\frac{J_6}{J_{8,3}}$	1,55	1,50	1,35	1,50	1,45

berechnet: 1,39

Für den *kleinsten* benutzten Zug von 3,2 kg/mm² gilt diese Beziehung nicht mehr: so erhält man statt des berechneten Wertes 8,3:3,2 = 2,6 die Werte:

Temperatur	331 °C	334 °	342 ° (Θ)	346 °	350,5 °
$\frac{J_{3,2}}{J_{8,3}}$	2,0	1,7	1,9	2,0	2,2

Ebenso gilt sie nicht mehr für höhere Felder (z. B. 9 Oe oberhalb Θ).

Die Abhängigkeit des Produktes $\kappa_0 Z$ von der Temperatur zeigt Fig. 8. Diese schließt sich an die frühere unterhalb des CP. gemessene Kurve¹⁾ an und hat nahezu die Form einer e -Funktion.

Zusammenfassung

1. Die „Curietemperatur“ in der bisher üblichen Definition wird auf Grund magnetischer Messungen als unabhängig vom Zug erkannt.

2. Die wahre Magnetisierung ist im Gegensatz zur ferromagnetischen Magnetisierung unabhängig vom Zug. Daher läßt sich zwischen beiden unterscheiden.

3. Bis 12° oberhalb dieser „Curietemperatur“ wird in Feldern von 4,6 Oe ferromagnetische, zugabhängige Magnetisierung nachgewiesen.

4. Die Anfangssuszeptibilität κ_0 oberhalb der Curietemperatur ist bei größerem Zug proportional zu $1/Z$.

5. $\kappa_0 Z$ hat unterhalb der Curietemperatur ein Maximum und nimmt dann in angenäherter e -Funktion mit der Temperatur ab.

Diese Untersuchung wurde auf Anregung und unter Leitung von Herrn Professor Dr. Walther Gerlach ausgeführt.

1) G. Scharff, a. a. O. Fig. 6. Das Maximum dieser Kurve ist entsprechend diesen neuen Messungen nach höheren Temperaturen zu verlegen. In dieser Arbeit ist ferner die Dimension der Magnetisierung falsch angegeben: in den Figuren und Berechnungen bezeichnet J stets das magnetische Moment pro Volumeinheit, also ebenfalls Oersted und nicht Gauss.

München, Physikal. Institut der Universität, November 1935.

(Eingegangen 28. November 1935)

Über die Geschwindigkeitsabnahme von H-Kanalstrahlen in Metallen¹⁾

von Heinrich Bätzner

(Mit 10 Figuren)

Inhalt: § 1. Der Durchgang von H-Kanalstrahlen durch Materie. —
§ 2. Zusammenhang zwischen Geschwindigkeitsabnahme und Reichweite. —
§ 3. Bisher bekannte Meßergebnisse. — § 4. Grundzüge von Apparatur und
Meßmethode. — § 5. Herstellung eines homogenen Kanalstrahlbündels geringer
Geschwindigkeit. — § 6. Die Magnetkammern. — § 7. Schaltungsweisen der
Spitzenkammer. — § 8. Herstellung der Metallfolien und Bestimmung ihrer
Dicke. — § 9. Auflösungs- und Bremskurven. — § 10. Der Geschwindigkeits-
verlust — § 11. Geschwindigkeits- und Energieabnahme. — § 12. Atomare
Bremswirkung. — § 13. Reichweite. — Zusammenfassung.

§ 1. Der Durchgang von H-Kanalstrahlen durch Materie

Die beim Durchgang von H-Kanalstrahlen durch Materie auftretenden Erscheinungen lassen sich einteilen in solche, die der Wechselwirkung mit den Atomkernen entspringen, und solche, die auf der Wechselwirkung mit den Atomelektronen beruhen.

Durch die *Atomkerne* werden die H-Kanalstrahlen aus ihrer ursprünglichen Richtung abgelenkt, ohne dabei wesentlich an Geschwindigkeit einzubüßen.

Die Wechselwirkung der H-Kanalstrahlen mit den *Elektronen* kommt in mannigfaltiger Weise zur experimentellen Beobachtung: einerseits als Erwärmung, Anregung von Strahlung, Auslösung von Sekundärelektronen und Ionisierung, falls wir die von den getroffenen Atomen ausgehenden Wirkungen ins Auge fassen; andererseits als Umladung, Geschwindigkeitsabnahme und begrenzte Reichweite, wenn wir uns für das Schicksal der Kanalstrahlteilchen selbst interessieren.

Aus dem Gesamtgebiet dieser Erscheinungen sollen im nächsten Paragraphen Geschwindigkeitsabnahme und Reichweite näher betrachtet werden.

1) Dissertation der philosophischen Fakultät der Universität Gießen.

§ 2. Zusammenhang zwischen Geschwindigkeitsabnahme und Reichweite

Geschwindigkeitsabnahme und Reichweite hängen eng zusammen. Versteht man unter der Reichweite R den wirklichen Weg, den ein Teilchen zurücklegt, während seine Geschwindigkeit von ihrem Anfangswert v_a auf einen Restwert v_r abnimmt, so ist

$$(1) \quad R(v_a) = \int_{v_a}^{v_r} dx = \int_{v_a}^{v_r} \frac{dv}{\frac{dv}{dx}}.$$

wobei dv/dx die Geschwindigkeitsabnahme als Funktion der Geschwindigkeit v bedeutet. Umgekehrt erhält man aus dem Reichweitegesetz die Geschwindigkeitsabnahme durch Differentiation:

$$(2) \quad \frac{dv}{dx} = - \frac{1}{\frac{dR}{dv}}.$$

Geschwindigkeitsabnahme und Energieabnahme hängen zusammen durch die Gleichung:

$$(3) \quad \frac{dE}{dx} = \frac{dE}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = mv \frac{dv}{dx},$$

wobei E die Energie, m die Masse des H-Atoms bedeutet.

Diese Beziehungen ermöglichen es, die vorliegenden Messungen miteinander zu vergleichen, einerlei, ob primär Reichweiten oder Geschwindigkeitsverluste gemessen wurden.

§ 3. Bisher bekannte Meßergebnisse

Es ist zunächst einzugehen auf eine Arbeit von Gerthsen¹⁾ in der über Reichweitemessungen in Luft und Wasserstoff berichtet wird. Gerthsen fand für die Reichweite²⁾ von H-Kanalstrahlen des Energiebereichs 27—57 e-KV das Gesetz:

$$(4) \quad R = a v^{1/2}.$$

Die Konstante a ergibt sich aus den mitgeteilten Daten für Luft von 1 mm Hg Druck zu $1,167 \cdot 10^{-11} \text{ cm}^{-1/2} \text{ sec}^{1/2}$. Für Geschwindigkeits- und Energieabnahme erhält man somit die Formeln:

$$(5) \quad \frac{dv}{dx} = - 5,72 \cdot 10^{10} \cdot v^{-1/2} \frac{\text{cm/sec}}{\text{cm}}$$

1) Chr. Gerthsen, Ann. d. Phys. [5] 5. S. 657. 1930.

2) Der Unterschied zwischen der in § 2 gegebenen Definition und dem von Gerthsen angewandten Reichweitebegriff (S. 660) wird vorläufig außer acht gelassen. Er wird in § 13 diskutiert werden.

und

$$(6a) \quad \frac{dE}{dx} = - 9,51 \cdot 10^{-14} \cdot v^{1/2} \text{ Erg/cm},$$

$$(6b) \quad = - 5,97 \cdot 10^{-5} \cdot v^{1/2} \text{ e-KV/cm}.$$

Das Bremsvermögen des Wasserstoffs bezogen auf Luft hat nach Gerthsen in dem untersuchten Geschwindigkeitsbereich den Wert 0,4.

Daß bei den älteren Messungen von *Königsberger* und *Kutschewsky*¹⁾ keine Geschwindigkeitsverluste beobachtet worden waren, steht zu diesen Meßergebnissen von Gerthsen nicht im Widerspruch. Die Anwendung der Formel (5) auf die Versuchsdaten bestätigt nämlich den experimentellen Befund, wonach der Geschwindigkeitsverlust die zu 0,5% angegebene Fehlergrenze der Geschwindigkeitsmessung nicht erreicht hatte.

Von den an festen Stoffen ausgeführten Messungen wird auf die Messung von *Rausch von Traubenberg* und *Hahn* an Goldfolien in anderem Zusammenhang einzugehen sein (vgl. § 9).

*Eckardt*²⁾ hat die Geschwindigkeitsänderung untersucht, die Kanalstrahlen erleiden, wenn sie eine Zelluloidfolie durchsetzen, und konnte dabei zum ersten Mal Geschwindigkeitsverluste direkt nachweisen. Die Anfangsenergie, mit der die Kanalstrahlen in die Folie eintraten, lag bei seinen Messungen zwischen 31 und 51 e-KV. Er fand den Geschwindigkeitsverlust proportional der Foliendicke. Eine Abhängigkeit des Proportionalitätsfaktors von der Geschwindigkeit war nicht festzustellen, doch würde eine geringe Änderung der Geschwindigkeitsabnahme mit der Kanalstrahlenenergie, etwa im Sinne der bei Luft und Wasserstoff gefundenen Proportionalität mit $v^{-1/2}$ [vgl. Formel (5)] innerhalb der Meßfehlergrenzen liegen. Einerseits ist nämlich der von Eckardt untersuchte Geschwindigkeitsbereich nur klein, andererseits führt die relativ weit gesteckte Fehlergrenze seiner Geschwindigkeitsmessung bei der Differenzbildung zu einer recht erheblichen Unsicherheit.

*Reusse*³⁾ hat nach derselben Methode wie Eckardt und an derselben Substanz gemessen, aber in einem andern Geschwindigkeitsbereich. Die Anfangsenergien lagen bei seinen Messungen meist zwischen 4,5 und 10 e-KV. Er fand starke Zunahme des Energie-

1) J. Königsberger u. J. Kutschewsky, Ann. d. Phys. [4] 37. S. 161. 1912.

2) A. Eckardt, Ann. d. Phys. [5] 5. S. 401. 1930.

3) W. Reusse, Dissertation Tübingen 1932, und Ann. d. Phys. [5] 15. S. 256. 1932.

verlustes ΔE mit der Anfangsgeschwindigkeit v_a , die sich durch die Formel darstellen ließ:

$$(7) \quad \Delta E = c \cdot v_a^2,$$

wobei c eine Konstante für eine bestimmte Folie bedeutet. Für die differentielle Energieabnahme ergibt sich daraus ebenfalls Proportionalität mit v^2 :

$$(8) \quad \frac{dE}{dx} = c' \cdot v^2.$$

Die Gültigkeit der Formel (7) ist jedoch auf Energien unter 10 e-KV beschränkt. Schon Reusses eigene Messungen bei Anfangsenergien von etwa 10 bis etwa 25 e-KV lassen sich nicht mehr durch diese Beziehung darstellen. Die bei rund 40 e-KV von Eckardt gemessenen Energieverluste sind nur etwa halb so groß, als man sie aus Reusses Messungen unterhalb 10 e-KV nach Formel (8) extrapoliert.

Die Messungen von Gerthsen, Eckardt und Reusse stimmen in der wichtigen Feststellung überein, daß die Energieabnahme mit der Energie der Kanalstrahlen zunimmt, wie dies auch von der differentiellen Ionisation durch Messungen von Bärwald¹⁾ und von Gerthsen²⁾ bekannt ist. Der funktionelle Zusammenhang zwischen Energieabnahme und Geschwindigkeit ist jedoch nicht für den ganzen untersuchten Geschwindigkeitsbereich durch eine einfache mathematische Formel darstellbar, so wenig wie dies bei den α -Strahlen der Fall ist. Gleichungen der Form

$$(9) \quad \frac{dE}{dx} = C \cdot v^k,$$

wo k eine Konstante bedeutet, stellen nur für begrenzte Bereiche brauchbare Näherungen dar; der Wert von k bewegt sich dabei zwischen 2 bei den kleinsten und $\frac{1}{2}$ bei den größten untersuchten Geschwindigkeiten.

In der vorliegenden Arbeit wird über neue Messungen nach der schon von Eckardt benutzten Methode berichtet, wobei die Energieverluste in der einzelnen Folie durch den ganzen Energiebereich von etwa 4 bis etwa 60 e-KV hindurch verfolgt wurden. Zugleich wurde durch Verwendung von Metallfolien verschiedener Art untersucht, in welcher Weise die Bremswirkung vom Material abhängt.

§ 4. Grundzüge von Apparatur und Meßmethode

Einen Überblick über die verwendete Apparatur gibt Fig. 1. Die Bahn der Kanalstrahlen verlief ganz in einer horizontalen Ebene.

1) H. Bärwald, Ann. d. Phys. [4] **65**, S. 167. 1921.

2) Chr. Gerthsen, a. a. O.

Sie traten aus dem Kanal der Kathode K ins Hochvakuum aus, wurden zwischen Kathode und Beschleunigungskörper B nachbeschleunigt und im Magnetfeld M_1 aufgelöst. Durch die Abschlußblende des Lochkäfigs L gelangten dann Kanalstrahlen einheitlicher Art und Geschwindigkeit in das Magnetfeld M_2 ¹⁾. Zwischen Lochkäfing und Magnetfeldgrenze konnten die Meßfolien durch einen

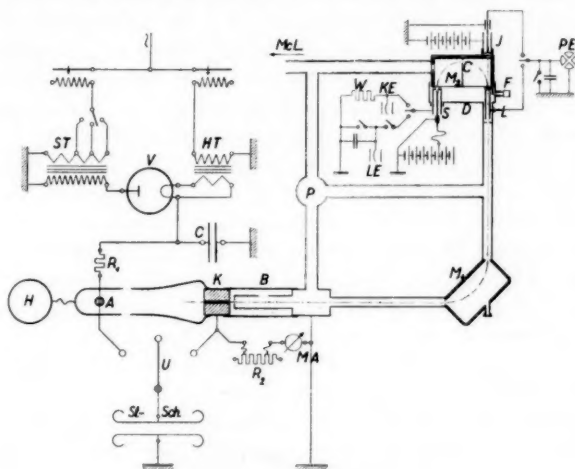


Fig. 1. Schema der Apparatur

Schliff F in den Strahlengang eingeschaltet werden. Mittels des Meßmagneten M_2 wurde die Geschwindigkeit gemessen, indem die Feldstärke bestimmt wurde, bei der die Teilchen auf halbkreisförmiger Bahn zur Spitzenkammer S geführt wurden. Bei eingeschalteter Meßfolie begrenzte dabei der Spalt C den erfaßten Raumwinkel der Breite nach. Diejenigen Teilchen, welche die Folie infolge der Umladungen neutral verließen, gelangten zum Teil in die Ionisationskammer I .

Bei der einzelnen Messung wurde die Stromstärke i_1 im Auflösungsmagneten M_1 konstant gehalten; bestimmt wurde der zur Spitzenkammer S gelangende Kanalstrahlstrom als Funktion der Stromstärke i_2 im Meßmagneten M_2 , und zwar sowohl bei weggedrehter als auch mit eingeschalteter Folie. Die von der Spitzenkammer S aufgenommenen Kanalstrahlmengen wurden dabei nicht einfach über gleiche Zeiten gemessen, sondern auf gleiche auftreffende Protonenmengen bezogen. Diese Dosierung geschah bei

1) Vgl. hierzu auch Fig. 3.

hoher Intensität mittels der Ionisationskammer *I*, bei geringer mittels des Lochkäfigs *L*; diese Apparate wurden wahlweise an ein Quadrantenelektrometer nach Paschen *PE* angeschlossen.

**§ 5. Herstellung eines homogenen Kanalstrahlbündels
geringer Geschwindigkeit**

Die Anordnung zur Erzeugung, Nachbeschleunigung und magnetischen Auflösung der Kanalstrahlen war im wesentlichen der von Gerthsen¹⁾ beschriebenen nachgebildet. Nur die Handhabung der Nachbeschleunigung wich bei einem Teil der Versuche, nämlich bei den Messungen mit Kanalstrahlen geringer Geschwindigkeit, vom Bekannten ab und soll deshalb hier besprochen werden.

Die Nachbeschleunigung der Kanalstrahlen diente bei diesen Versuchen ausschließlich dem Zweck, die Auflösung des primären Strahlenbündels durch das erste Magnetfeld zu ergänzen. Ein transversales Magnetfeld lenkt alle einfach geladenen Teilchen gleichen Impulses in derselben Weise ab. Die Auflösungskammer würde daher bei einem bestimmten Magnetstrom i , neben Atomionen H^+ von beispielsweise 10^8 cm/sec und rund 5,2 e-kV auch Molekülionen H_2^+ hindurchlassen, welche die Hälfte dieser Geschwindigkeit und die Hälfte dieser Energie hätten. Um die Atome H^+ allein zu erhalten, muß man die Wirkung des Magnetfeldes ergänzen durch Anwendung eines elektrischen Feldes, z. B. durch Nachbeschleunigung der Kanalstrahlen im Hochvakuum.

Solange man es mit den gewöhnlichen Kanalstrahlenergien zu tun hat, ist es nun zweckmäßig, die Entladungsspannung V_e kleiner als die Beschleunigungsspannung V_b zu machen. Man erhält dann, wie Gerthsen²⁾ gezeigt hat, die Atome H^+ aller vorkommenden Geschwindigkeiten frei von Beimengungen anderer Ionenarten. Die Verteilungskurve für einen solchen Fall ist in Fig. 2a schematisch dargestellt. Die langsamsten Teilchen jeder Art haben nur die Beschleunigungsspannung V_b , die schnellsten die Gesamtspannung $(V_e + V_b)$ durchfallen.

Wenn es sich aber darum handelt, der normalen Anordnung Kanalstrahlen von wenigen e-kV zu entnehmen, dann würde die Einhaltung der Vorschrift $V_e < V_b$ eine sehr weiche Entladung und damit ganz unzureichende Kanalstrahlintensität bedingen. Glücklicherweise ist aber diese Vorschrift gar keine notwendige Bedingung für die Erzielung reiner Atomstrahlen. Man kann beim Übergang zu niedrigeren Energien ebensogut die Entladungsspannung

1) Chr. Gerthsen, Ann. d. Phys. [4] **85**, S. 887. 1928.

2) Chr. Gerthsen, Ann. d. Phys. [5] **3**, S. 397. 1929.

unverändert lassen und nur die Beschleunigungsspannung verringern. Sie betrage noch 4 kV, dann überlagern sich zwar für einen großen Bereich der magnetischen Feldstärke Atom- und Molekülionen, wie Fig. 2b zeigt, die Atome des Energiebereichs A bis $2A$ e-kV bleiben aber von solcher Überlagerung frei. Beigemischte Molekülionen

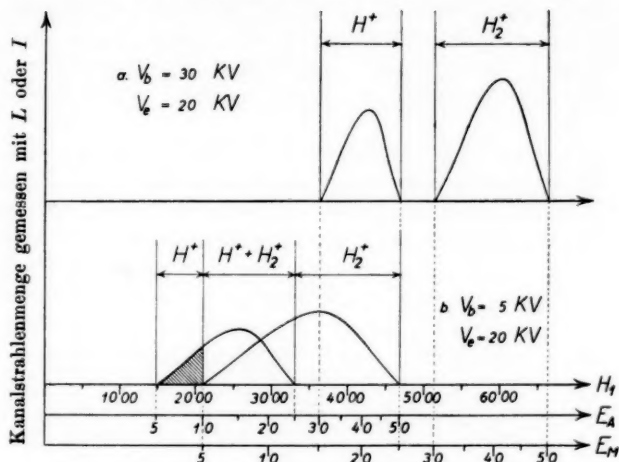


Fig. 2. „Teilchenzahlkurve“
für verschiedene Spannungsverhältnisse, schematisch.

Abszissenmaßstäbe:

H_1 Feldstärke in der Auflösungskammer M_1 ; E_A Energie der Atome H^+ in e-kV; E_M Energie der Moleküle H_2^+ in e-kV

müßten ja Energien zwischen $A/2$ und A e-kV haben, was ausgeschlossen ist, da wegen der vollständigen Ausnutzung der Beschleunigungsspannung geladene Teilchen geringerer Energie als A e-kV überhaupt nicht in die Auflösungskammer eintreten. Um also Atome der Energie $E = B$ e-kV rein zu erhalten, genügt es, die Beschleunigungsspannung so zu wählen, daß $V_b < B < 2V_b$ ist; die Entladungsspannung V_c ist keiner Beschränkung unterworfen¹⁾.

Praktisch erwies sich diese Möglichkeit, dauernd mit derselben normalen Rohrhärte zu arbeiten und nur die Beschleunigungs-

1) Im Laufe der Untersuchung hat sich gezeigt, daß die Reinheit des Strahlenbündels für Energieverlustmessungen nicht von ausschlaggebender Bedeutung ist. Beigemengte Moleküle zerfallen nämlich beim Eindringen in die Meßfolie in Atome. Diese Atome haben nur $1/4$ der Energie jener Teilchen, welche schon die erste Magnetkammer als Atome passierten, und sind deshalb von jenen leicht zu unterscheiden.

spannung zu variieren, als sehr günstig, gelang es doch auf diese Weise, bis zu 4 e-kV herab eine für die Messungen ausreichende Intensität zu erzielen. Beim Übergang zu einer anderen Kanalstrahlenergie brauchte außer dem Magnetstrom i_1 nur der in Fig. 1 mit R_2 bezeichnete Kathodenableitwiderstand verändert zu werden. Die notwendige dauernde Kontrolle der Beschleunigungsspannung wurde mit einem Hochspannungsvoltmeter nach Starke-Schröder durchgeführt, das durch den Umschalter U wahlweise mit der Anode oder der Kathode verbunden werden konnte.

§ 6. Die Magnetkammern

Die Kammern, in denen die Kanalstrahlen der Einwirkung magnetischer Felder ausgesetzt wurden, bestanden aus eisernen Platten, die am Rand mit einem Messingstreifen verlötet waren, der

ihren Abstand definierte und das Interferrikum vakuumdicht nach außen abschloß.

Die *Auflösungskammer* M_1 trug im Eintrittsstutzen eine Aluminiumblende von 1 mm Durchmesser und hatte in der rückwärtigen Verlängerung des Austrittsstutzens ein Justierfenster.

Die *Meßkammer* M_2 ist in Fig. 3 abgebildet. Ihr Zubehör bestand aus dem Folienhalter F , dem Lochkäfig L und der Spitzenkammer S , die in

einem aufgekitteten Messingdeckel eingesetzt waren, ferner aus der Ionisationskammer I und der Mittelblende C . (J deutet das Joch des Magneten an.) Das Interferrikum war $100 \times 50 \times 5\text{ mm}$ groß.

Die Verbindung zwischen Auflösungs- und Meßkammer war in ihrem letzten Teil als *Lochkäfig* L ausgebildet und darum gegen die übrigen Teile der Apparatur durch Hartgummi isoliert. Die geerdete Eintrittsblende hatte 2 mm Durchmesser, die Öffnung in

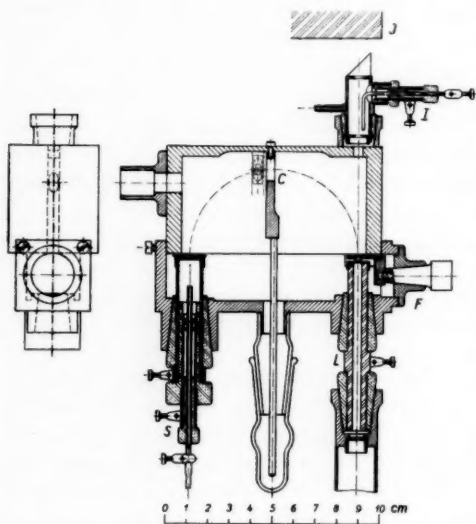


Fig. 3. Meßkammer

der Bodenkappe 0,7 mm Durchmesser. Die Ränder beider Blenden bestanden aus Aluminiumfolien von 0,02 mm Dicke.

Bei den Messungen mit Folie wurde die Dosierung mit der *Ionisationskammer I* vorgenommen, wofern die Intensität dazu ausreichte. Dabei wurde das durch einen Hartgummischliff von der Magnetkammer isolierte Gehäuse auf etwa 80 Volt Spannung gebracht; die erdgeschützte Innenelektrode wurde mit dem Elektrometer verbunden. Zum gasdichten Abschluß der 3 mm weiten Öffnung gegen das Hochvakuum dienten Zelluloidhäutchen von etwa 80 μ Dicke.

Die *Spitzenkammer S* war ihrem Bau nach ein Geigerscher Spitzenzähler; von ihrer Schaltung und Wirkungsweise handelt der nächste Paragraph. Das Gehäuse war gegen Kriechströme von der auf Spannung befindlichen Innenelektrode erdgeschützt und durch einen Schliff Hartgummi gegen Messing in den Deckel der Kammer eingesetzt. Zur Füllung wurde trockene Luft verwendet, der Druck betrug 80 mm Hg. Die Öffnung der Kappe von 0,9 mm Durchmesser wurde durch farblose Zelluloidhäutchen verschlossen, deren Dicke zwischen 60 und 120 μ variieren mochte.

Der *Folienhalter F* gestattete es, die Meßfolien auszuwechseln, ohne daß die Justierung der Meßkammer angetastet werden mußte. Er war zur gleichzeitigen Aufnahme von drei Meßfolien eingerichtet, die nach Wahl in den Strahlengang eingeschwenkt werden konnten. Die richtige Lage der fast ausnahmslos durchsichtigen Meßfolien konnte dabei optisch kontrolliert werden.

Die *Mittelblende C* bestand aus einem in 0,02 mm starke Aluminiumfolie geschnittenen Schlitz von 5 mm Breite und 2 mm Höhe. Dadurch war die Winkelstreuung der zur Geschwindigkeitsmessung gelangenden Strahlen auf etwa $\pm 4^\circ$ horizontale Abweichung vom Zentralstrahl begrenzt.

§ 7. Schaltungsweisen der Spitzenkammer

Je nachdem bei hoher oder niedriger Spannung, mit oder ohne Folie gemessen wurde, waren Kanalstrahlströme von sehr verschiedener Größenordnung zu messen. Hierbei erwies sich die Spitzenkammer als ein überaus anpassungsfähiges Meßinstrument. Durch einfache Änderungen in der Schaltung war es möglich, ihre Empfindlichkeit in so weiten Grenzen zu variieren, daß alle vor kommenden Intensitätsbereiche von 10^{-20} Amp. aufwärts fast lückenlos bewältigt werden konnten.

a) Bei den höchsten Intensitäten wurde die von den Kanalstrahlen erzeugte *Ionisation* als Maß der Kanalstrahlintensität be-

nutzt. Zu diesem Zweck wurde das Gehäuse der Spitzenkammer mit einem Einfadenelektrometer nach Lutz-Edelmann (*LE* in Fig. 1) verbunden. An der Spitze lag in diesem Fall eine positive Spannung von ungefähr 80 Volt.

b) Bei geringeren Intensitäten wurde der Ionisationsstrom durch *Stoßmultiplikation* auf eine bequem meßbare Größe gebracht. Zu diesem Zweck wurde die positive Spannung an der Spitze auf einige 100 Volt erhöht. Da die Aufladung des Elektrometers die Potentialdifferenz an der Spitzenkammer um Beträge bis zu 1 Volt erniedrigte, wurde jeweils geprüft, ob die sich daraus ergebende Herabsetzung des Multiplikationsfaktors die Messung merklich fälschen konnte. Wenn dies der Fall war, wurden die gemessenen Aufladungen entsprechend korrigiert.

c) Für vorläufige Messungen mit dem Ziel, nur die ungefähre Lage des Maximums einer Geschwindigkeitsverteilung zu ermitteln, wurde das Gehäuse der Spitzenkammer mit dem Kolhörsterschen Schlingenelektrometer *KE* verbunden, das in diesem Fall dazu diente, den Spannungsabfall anzuzeigen, den der Ionisationsstrom an dem Ableitwiderstand *W* von etwa 10^{10} Ohm erzeugte. Die an die Spitze gelegte Spannung wurde dabei in der Nähe der Auslösspannung gewählt.

d) Nur wenn die Energie der gebremsten Kanalstrahlen den Betrag von etwa 5 e-kV unterschritt, wurde die Kammer als *Auslösezähler* benützt. Auch in diesem Fall lag an der Spitze positive Spannung, nicht wie sonst üblich negative. Bei negativer Spitze werden nach einer Untersuchung von Reusse¹⁾ Protonen schon von etwa 8 e-kV an abwärts nicht mehr quantitativ gezählt; die Ausbeute sinkt in diesem Gebiet mit abnehmender Energie rasch ab und erreicht bei etwa 4 e-kV den Wert 0. Der Auslösezähler mit positiver Spitze, dessen besondere Eignung zur Zählung schwach ionisierender Strahlen Bothe²⁾ und Hild³⁾ festgestellt haben, zeigt bei diesen niedrigen Energien bessere Ausbeute. Es wurde wiederholt beobachtet, daß die Zahl der registrierten Teilchen beim Übergang von negativer zu positiver Spitze auf das Mehrfache anstieg. Vor allem aber liegt der Schwellenwert der Energie bei positiver Spitze wesentlich tiefer als bei negativer. Ein bestimmter Zähler z. B. der bei negativer Spitze auf Protonen unterhalb 2,9 e-kV nicht mehr ansprach, zählte bei positiver Spitze bis zu 1,7 e-kV

1) W. Reusse, a. a. O.

2) W. Bothe, Ztschr. f. Phys. 37. S. 552. 1926.

3) K. Hild, Dissertation Kiel, 1930.

herab¹⁾. Dadurch war es möglich, die gebremste Strahlung im Extremfall bis zu einer mittleren Endenergie von 1,9 e-kV herab zu verfolgen.

§ 8. Herstellung der Metallfolien und Bestimmung ihrer Dicke

Die Metallfolien wurden gewonnen als Niederschlag beim Verdampfen des Metalls im Hochvakuum. Die Verdampfung geschah in Kurzschlußöfchen, die in verschiedener Form aus Wolframblech gefaltet wurden. Nur bei Aluminium wurde das Öfchen noch mit Aluminiumoxyd ausgefüttert, da geschmolzenes Aluminium das Wolframblech rasch auflöst, wenn die unmittelbare Berührung nicht verhindert wird. Als leicht wieder aufzulösende Unterlage für die Metallschichten fanden Häutchen von Zelluloseacetat Verwendung, wie sie von G. P. Thomson²⁾ für diesen Zweck eingeführt wurden. Mit einem zweiten solchen Häutchen wurde die Metallschicht vor der Weiterbehandlung bedeckt, um sie vor Verletzung zu schützen. Aus der nun dreischichtigen Folie wurde zunächst ein Kreis von 24 mm Durchmesser ausgeschnitten, und aus dieser Fläche wieder drei oder mehr kleine Kreise von 4 mm Durchmesser. Die letzteren wurden nach Ablösung des Zelluloseacetats in reinstem Aceton auf Trägerscheibchen mit 1 mm Lochdurchmesser aufgefangen und zur Kanalstrahlungsmessung verwendet. Der Rest der großen Kreisfläche diente zur Dickenbestimmung. Er wurde ebenfalls vom Zelluloseacetat befreit, aus dem letzten Acetonbad mit einem Haken aus Platindraht aufgefangen und mit einer Quarzfederwaage gewogen. Aus dem Gewicht G , dem Flächeninhalt F und der Dichte s ergibt sich die Dicke d nach der Gleichung:

$$(10) \quad d = \frac{G}{s \cdot F}.$$

Die Dicke der einzelnen Meßfolien brauchte allerdings mit dieser mittleren Dicke der Restfolie nicht völlig übereinzustimmen, da geringe Unterschiede in der Flächendichte des Niederschlags schon aus geometrischen Gründen zu erwarten waren. Wie man auf Grund der Kanalstrahlungsmessungen selbst zu einer Korrektion gelangen kann, darüber wird in § 11 berichtet.

1) Ihre Ursache könnte diese erstaunliche Empfindlichkeit des Zählers mit positiver Spitze gegenüber langsamen Kanalstrahlen darin haben, daß in diesem Fall zur Auslösung einer Entladung vielleicht gar keine primäre Ionisation durch Stoß nötig ist, sondern schon die Anregung kurzwelliger Strahlung genügt. Das Gehäuse bietet solcher Strahlung eine große Fläche zur Auslösung von Photoelektronen, die zur positiven Spitze hin beschleunigt werden und den Entladungsstoß einleiten können.

2) G. P. Thomson, Proc. Roy. Soc. London (A) **125**. S. 352. 1929.

Eine prinzipielle Schwierigkeit bei der Dickenbestimmung durch Wägung liegt darin, daß die Metalle in der Form dünner aufgedampfter Schichten wahrscheinlich eine etwas andere Dichte haben als im kompakten Zustand¹⁾. Da in der vorliegenden Arbeit stets die normalen Werte der Dichte verwendet wurden, muß also damit gerechnet werden, daß die wirklichen Dicken von den so gefundenen Werten erheblich abweichen. Dagegen kann die Zahl der Atome pro Flächeneinheit aus dem Gewicht pro Kubikzentimeter einwandfrei abgeleitet werden, wovon in § 12 Gebrauch gemacht wird.

§ 9. Auflösungs- und Bremskurven

Die Bremswirkung auf Kanalstrahlen wurde gemessen an Folien aus Kupfer, Silber, Gold und Aluminium, wobei die Dicken zwischen 30 und 64 $m\mu$ lagen, und an einer Zinnfolie von 144 $m\mu$ Dicke.

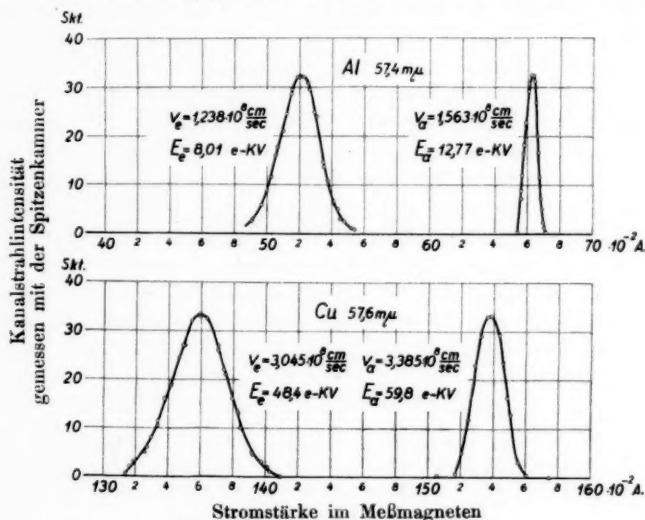


Fig. 4. Zwei Paare von Meßkurven.
Rechts Auflösungs-, links Bremskurven²⁾

Von den unmittelbaren Ergebnissen der einzelnen Messungen sind in Fig. 4 zwei typische Beispiele dargestellt.

1) Vgl. H. Kiesig, Ann. d. Phys. [5] 10. S. 729. 1931.

2) Da Dosierung und Empfindlichkeit von Messung zu Messung geändert wurden, sind Ordinaten aus verschiedenen Kurven nicht vergleichbar. Selbstverständlich waren die Intensitäten bei der Messung von Auflösungskurven von höherer Größenordnung als bei der Messung von Bremskurven.

Bei weggedrehter Folie erhielt man schmale Meßkurven, die im folgenden als *Auflösungskurven* bezeichnet seien, da ihre Form durch das Auflösungsvermögen der Magnetkammern bedingt ist. Sie sind praktisch symmetrisch; ihre Halbwertsbreite beträgt nicht über 1,4% der mittleren Feldstärke.

Wurde bei denselben Stromstärken im Auflösungsmagneten mit in den Strahlengang eingeschwenkter Folie gemessen, so fielen die entsprechenden Meßkurven breiter aus und waren nach niedrigeren Stromstärken hin verlagert. Verlagerung und Verbreiterung sind die Folge des um einen Mittelwert schwankenden Geschwindigkeitsverlustes. Diese Meßkurven geben also über die Bremswirkung der Folie Aufschluß und seien deshalb *Bremskurven* genannt. Sie zeigen in der Regel nahezu den Typus der Gauss'schen Fehlerkurve und weichen davon nur insofern ab, als sie nach der Seite der höheren Stromstärken etwas steiler abfallen.

Einen bemerkenswerten Sonderfall stellt die Bremskurve dar, die in Fig. 5 zusammen mit der zugehörigen Auflösungskurve

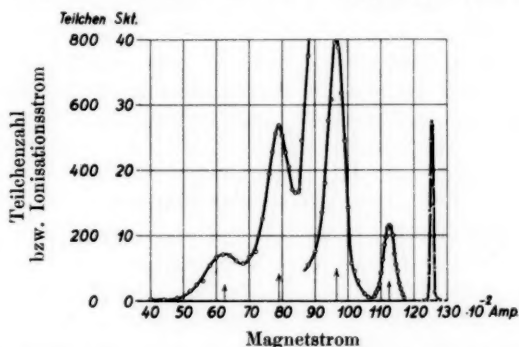


Fig. 5. Bremskurve, gemessen an einer gefalteten Goldfolie von 49,1 μ einfacher Dicke; mit zugehöriger Auflösungskurve

wiedergegeben ist. Bei dieser Messung wurde eine Folie benutzt, die sich beim Auffangen auf den Träger in Falten gelegt hatte. Dadurch war die Folie in der Hauptsache doppelt, kleinere Teile bestanden aus drei und vier Lagen und an einer Stelle war durch einen Riß in der Verdopplung auch ein schmaler Streifen von einfacher Dicke entstanden. Die Bremskurve, die teils durch ionometrische Messung, teils durch Zählen gewonnen wurde, zeigt vier den verschiedenen Dicken entsprechende Maxima und läßt anschaulich erkennen, wie die Schwankung des Geschwindigkeitsverlustes mit der Schichtdicke zunimmt. Bemerkenswert sind auch die Inten-

sitätsverhältnisse. Z. B. war die Strahlung, die nur die einfache Schichtdicke durchsetzt hatte, viel intensiver als die, welche durch den dreifachen Teil der Folie gegangen war, obwohl das einfache Stück der Folie dem Flächeninhalt nach nur einen geringen Bruchteil des dreifachen Stückes ausmachte. Die Ursache kann nur darin liegen, daß die auf die ursprüngliche Richtung entfallende Streudichte mit wachsender Foliendicke rasch abnimmt.

Diese Verminderung der Intensität durch die Streuung machte sich noch viel krasser bemerkbar, wenn die zur Messung verwendete Folie ein kleines Loch hatte, wie es z. B. durch ein während des Aufdampfens auf der Trägerfolie sitzendes Staubkorn verursacht werden konnte. In diesem Fall trat bei der Messung neben der gebremsten Strahlung die ungebremste auf, und zwar so intensiv, daß sie auch bei sehr kleinen Löchern bisweilen stärker war als die gebremste.

So mag es auch zu erklären sein, daß Rausch von Trautenberg und Hahn¹⁾ für den größten Teil der durch eine Goldfolie gegangenen Strahlen keinen Geschwindigkeitsverlust fanden. Es standen für solche Versuche damals nur geschlagene Folien zur Verfügung, die niemals lochfrei sind, und die Schwächung des gebremsten Strahlenbündels durch die Streuung in einer relativ dicken Folie mußte bei einer so schweren Substanz wie Gold besonders groß ausfallen.

§ 10. Der Geschwindigkeitsverlust

Die wichtigste Größe, die man aus einem Meßkurvenpaar ableiten kann, ist der mittlere Geschwindigkeitsverlust der Protonen in einer bestimmten Folie bei der gewählten Kanalstrahlgeschwindigkeit. Er ergibt sich als Differenz aus der Anfangsgeschwindigkeit v_a , der mittleren Geschwindigkeit beim Eindringen in die Folie, und der Endgeschwindigkeit v_e , der mittleren Geschwindigkeit beim Verlassen der Folie:

$$(11) \quad \Delta v = v_a - v_e.$$

Als Maß für die Geschwindigkeit diene die Feldstärke in der Meßkammer M_2 , deren Magnetisierungsfunktion mittels Probespule, ballistischem Galvanometer und magnetischem Etalon bestimmt worden war. Zwischen dieser Feldstärke H_2 und der Geschwindigkeit des Zentralstrahls besteht die Beziehung:

1) H. Rausch von Trautenberg u. J. Hahn, Ztschr. f. Phys. **9**. S. 359. 1922.

$$(12a) \quad v = \left(\frac{e}{m} \right) \cdot r_2 \cdot H_2$$

oder

$$(12b) \quad v = 3,732 \cdot 10^4 \cdot H_2,$$

da der mittlere Bahnradius r_2 durch den Bau der Meßkammer zu 3,9 cm gegeben war. Gl. (12) liefert auch die Geschwindigkeitsmittelwerte v_a bzw. v_s , wenn man für H_2 diejenige Feldstärke einsetzt, die dem Maximum der Auflösungs- bzw. Bremskurve entspricht. Im Falle der Bremskurven begeht man dabei allerdings einige Vernachlässigungen, deren bedeutendste den Unterschied zwischen mittlerer und häufigster Geschwindigkeit betrifft, doch sind diese Vernachlässigungen in der Regel zulässig.

Was die Anfangsgeschwindigkeit v_a betrifft, so hatte sich aus einer Serie von Auflösungskurven ergeben, daß zwischen ihr und der Strömstärke i_1 im Auflösungsmagneten eine für den ganzen benutzten Bereich gültige lineare Beziehung bestand von der Form:

$$(13) \quad v_a = a i_1 + b,$$

wobei b ein kleines, von der Remanenz herrührendes Zusatzglied ist. Nachdem dieser Zusammenhang festgestellt worden war, brauchte nicht mehr jede Folienmessung durch eine Messung ohne Folie ergänzt zu werden. Es genügte vielmehr, immer wieder einige Auflösungskurven aufzunehmen, um den Einfluß zu ermitteln, den kleine Verschiebungen in der gegenseitigen Lage der Apparaturteile auf die Größe des Faktors a ausgeübt haben mochten; die zur Auswertung der zeitlich benachbarten Folienmessungen benötigten Anfangsgeschwindigkeiten konnten dann nach Formel 13 errechnet werden.

Die Genauigkeit, mit der sich die Geschwindigkeitsverluste ergaben, ist naturgemäß viel geringer als die Genauigkeit, mit der die Geschwindigkeiten selbst gemessen wurden. Um z. B. eine Geschwindigkeitsdifferenz von einem Siebentel auf 1% genau zu erhalten, müßte man die Geschwindigkeiten auf 1 $\frac{1}{100}$ genau ermitteln. Absolut genommen, war eine solche Genauigkeit nicht erreichbar, vielmehr mag die Fehlergrenze für die Absolutwerte der Geschwindigkeit bei etwa 3% liegen. Dagegen konnte der mittlere Fehler der Relativwerte auf etwa $0,0025 \cdot 10^8$ cm/sec gedrückt werden, indem jede Auflösungs- und Bremskurve mehrmals durchgemessen und dabei das Feld in der Auflösungskammer jedesmal neu erregt wurde. Für die Relativwerte des Geschwindigkeitsverlustes bedeutet das im Durchschnitt einen mittleren Fehler von wenig mehr als 1%.

§ 11. Geschwindigkeits- und Energieabnahme

a) Geschwindigkeitsverlust und Geschwindigkeitsabnahme

Um aus dem Geschwindigkeitsverlust Δv in einer individuellen Folie eine für das bremsende Material charakteristische Konstante zu erhalten, bildet man den Quotienten $\Delta v / \Delta x$, wobei Δx die Wegstrecke bedeutet, auf welcher der Verlust Δv eintrat. Dieser Differenzenquotient $\Delta v / \Delta x$ gibt den Wert der differentiellen Geschwindigkeitsabnahme dv/dx bei einer Geschwindigkeit \bar{v} an, von der allerdings nur bekannt ist, daß sie zwischen der Anfangsgeschwindigkeit v_a und der Endgeschwindigkeit v_e liegt. Bei genügend dünnen Folien dürfte es jedoch erlaubt sein, für diese Geschwindigkeit \bar{v} das arithmetische Mittel aus Anfangs- und Endgeschwindigkeit zu setzen, ohne daß der dabei begangene Fehler den Einfluß der Meßfehler erreicht. Es ist also:

$$(14) \quad \frac{dv}{dx}(\bar{v}) = \frac{\Delta v}{\Delta x},$$

wobei näherungsweise $\bar{v} = \frac{1}{2}(v_a + v_e)$ gesetzt werden darf. Die differentielle Energieabnahme erhält man am einfachsten, indem man Gl. (14) mit $m \cdot \bar{v}$ multipliziert. Es ist:

$$(15) \quad \frac{dE}{dx}(\bar{v}) = m \cdot \bar{v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x},$$

da ja $dE = m v dv$ ist.

b) Die Dicke der Meßfolien

Die Größe Δx , die Länge des wirklichen Wegs der Kanalstrahlen in der Folie, ist nicht genau bekannt, doch dürfte sie im allgemeinen nicht viel größer sein als die Dicke der Meßfolien¹⁾. Diese wird allerdings durch die aus dem Gewicht der Restfolie nach Gl. (10) errechnete Dicke d nur in erster Annäherung gegeben. Um einen genaueren Wert zu erhalten, wurde in der Regel wie folgt verfahren. Es wurden aus jedem Herstellungsgang drei Meßfolien in die Apparatur eingesetzt und sofort alle drei nacheinander bei wenigstens einer Geschwindigkeit auf ihre Bremskraft untersucht. Dabei ergaben sich Unterschiede des Geschwindigkeitsverlustes bis zu 6%, die in der Hauptsache nur von Dickenunterschieden herühren konnten. Die Dicken der einzelnen Meßfolien wurden dann so ermittelt, daß sie den gemessenen Geschwindigkeitsverlusten proportional, und daß ihr Mittelwert gleich der durch Wägung gefundenen Dicke war. Die Messungen bei anderen Geschwindigkeiten konnten auf eine der drei Meßfolien beschränkt werden.

1) Vgl. § 13.

Wenn Folien einige Zeit in der Apparatur gewesen waren, zeigten sie erhöhte Bremswirkung infolge beginnender Amalgamierung. Der Geschwindigkeitsverlust nahm um Beträge bis zu 14% zu. Wenn es also nicht möglich war, die Messungen an einem Foliensatz im Verlauf weniger Tage abzuschließen, dann mußte der Einfluß der etwa eingetretenen Amalgamierung durch Wiederholung der ersten Geschwindigkeitsverlustmessung festgestellt, und bei der Errechnung der Geschwindigkeitsabnahme eine entsprechend erhöhte Dicke angesetzt werden. Da der prozentuale Anteil des gebundenen Quecksilbers an der Bremskraft einer Folie nur wenig geschwindigkeitsabhängig sein dürfte, schien dieses Verfahren erlaubt.

c) Geschwindigkeits- und Energieabnahme im Aluminium

Aus der Gesamtheit aller Messungen an derselben Substanz gewinnt man ein Bild des funktionalen Zusammenhangs zwischen der Geschwindigkeit und der Geschwindigkeits- bzw. Energieabnahme in dieser Substanz. Unter den verwendeten Metallen steht Aluminium den bisher untersuchten Substanzen Wasserstoff, Luft und

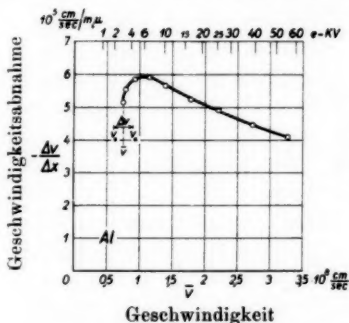


Fig. 6. Geschwindigkeitsabnahme in Aluminium

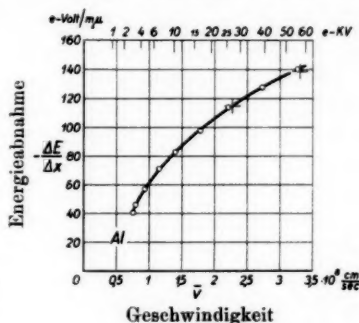


Fig. 7. Energieabnahme in Aluminium

Zelluloid am nächsten; als erstes Beispiel seien deshalb die Meßergebnisse an Aluminium mitgeteilt. Sie wurden gewonnen an drei Stücken einer Folie von 50,2 μ mittlerer Dicke. In Fig. 6 ist die Geschwindigkeitsabnahme, in Fig. 7 die Energieabnahme in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit dargestellt.

Man erkennt, daß die Geschwindigkeitsabnahme bei rund 6 e-KV am größten ist. Von da an nimmt sie nach höheren Energien hin langsam ab und beträgt bei 55 e-KV noch $\frac{2}{3}$ des Maximalwerts. Nach niedrigeren Energien hin fällt die Kurve rascher ab, bis sie bei etwa $0,75 \cdot 10^8$ cm/sec oder rund 3 e-KV abbricht. Dieser

Mindestwert für das Mittel aus Anfangs- und Endgeschwindigkeit wurde nur bei Aluminium als dem leichtesten der untersuchten Metalle erreicht, weil hier der Intensitätsverlust durch Streuung relativ klein war. Der letzte Meßpunkt entspricht einer mittleren Endenergie von nur noch 1,9 e-KV; das in der Folie durchlaufene Geschwindigkeitsintervall ist durch eine Maßlinie angedeutet.

Die *Energieabnahme* nimmt in dem ganzen untersuchten Geschwindigkeitsbereich zu, am meisten jedoch bei den geringsten Geschwindigkeiten. Der allgemeine Verlauf der Kurve steht im Einklang mit der Darstellung, die in § 3 auf Grund der bisherigen Messungen von der Energieabnahme in Zelluloid, Luft und Wasserstoff gegeben wurde. Ausgezeichnet ist die Übereinstimmung mit den dort gezogenen Folgerungen aus dem Gerthsenschen Reichweitengesetz, wonach die Energieabnahme in Luft und Wasserstoff für den Energiebereich 27 bis 57 e-KV durch eine Parabel der Gleichung

$$(nach\ 6) \quad \frac{dE}{dx} = -C \cdot v^{1/2}$$

darstellbar ist. Zwei Punkte einer solchen Parabel wurden in Fig. 7 als Kreuze + eingezeichnet. Sie bezeichnen zugleich die Grenzen des Geschwindigkeitsintervalls, über das sich die Reichweitmessungen von Gerthsen erstreckten. Wie man sieht, nimmt die Energieabnahme in Aluminium vielleicht um eine Spur stärker zu als es der obigen Formel entsprechen würde, doch bleibt der Unterschied innerhalb der Meßfehlergrenze.

Die graphische Darstellung der Bremswirkung von Aluminium wird im nächsten Paragraphen durch zahlenmäßige Angaben ergänzt werden. Dort sollen auch die Ergebnisse der Messungen an andern untersuchten Metallen in etwas veränderter Form mitgeteilt werden.

§ 12. Atomare Bremswirkung

a) Atomare Geschwindigkeits- und Energieverluste

Um die Bremskraft verschiedener Substanzen zu vergleichen wird man die Geschwindigkeits- und Energieverluste zweckmäßig nicht auf gleiche Foliendicke, sondern auf gleiche Flächendichte der Atome in der Folie reduzieren. Nun enthält eine Meßfolie der Dicke Δx pro cm^2

$$(16) \quad n = \frac{\Delta x \cdot s}{A} \cdot L$$

Atome, wobei s die Dichte, A das Atomgewicht und L die Loschmidtsche Zahl bedeutet. Also hängt der auf 1 Atom pro cm^2

bezogene Geschwindigkeitsverlust $\Delta v/n$ mit der Geschwindigkeitsabnahme zusammen durch die Beziehung

$$(17) \quad \frac{\Delta v}{n} = \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \frac{A}{s \cdot L}.$$

Für die Dichte s wird man hier denselben Zahlenwert einsetzen, den man bei der Errechnung der Dicke d nach Formel 10 verwendet hatte. Diese im Wert von Δx als Divisor enthaltene Zahl

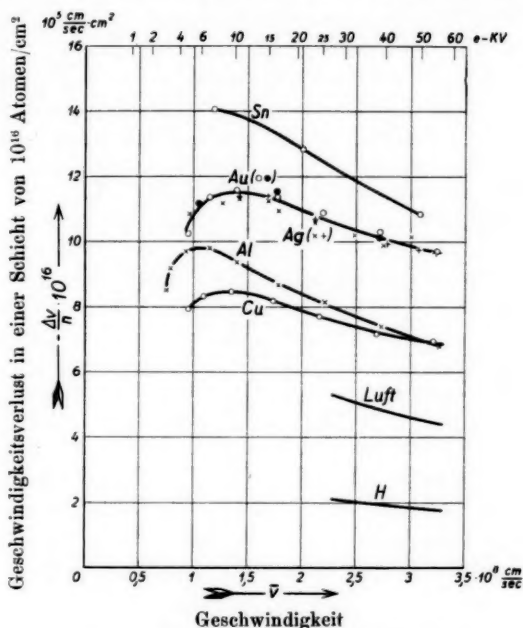


Fig. 8. Atomare Geschwindigkeitsverluste in den Metallen Al, Cu, Ag, Sn und Au, ferner in Luft und Wasserstoff nach den Reichweitmessungen von Gerthsen

hebt sich dann bei der Bildung des Ausdrucks $\Delta v/n$ wieder heraus. Der Wert des atomaren Geschwindigkeitsverlustes $\Delta v/n$ ergibt sich also unabhängig davon, welche Dichte die dünnen, durch Verdampfen hergestellten Folien in Wirklichkeit haben. Dasselbe gilt natürlich für den atomaren Energieverlust, den man analog erhält:

$$(18) \quad \frac{\Delta E}{n} = \frac{dE}{dx} \cdot \frac{A}{s \cdot L}.$$

In Fig. 8 und 9 sind die Meßergebnisse an allen untersuchten Metallen dargestellt, und zwar zeigt Fig. 8 die atomaren Geschwin-

digkeitsverluste, Fig. 9 die Energieverluste. Die Abszissen der Meßpunkte stellen wieder die Mittelwerte aus Anfangs- und Endgeschwindigkeit dar. Als Ordinaten sind nicht die Größen $\Delta v/n$ und $\Delta E/n$ selbst, sondern ihr 10^{16} -faches aufgetragen. Dies hat den Vorzug, daß sich die Verluste auf vorstellbare Schichten beziehen, deren Dicke zwischen $1,18 \mu$ bei Kupfer und $2,68 \mu$ bei Zinn variiert. Zum Vergleich sind noch die Kurven für Luft und

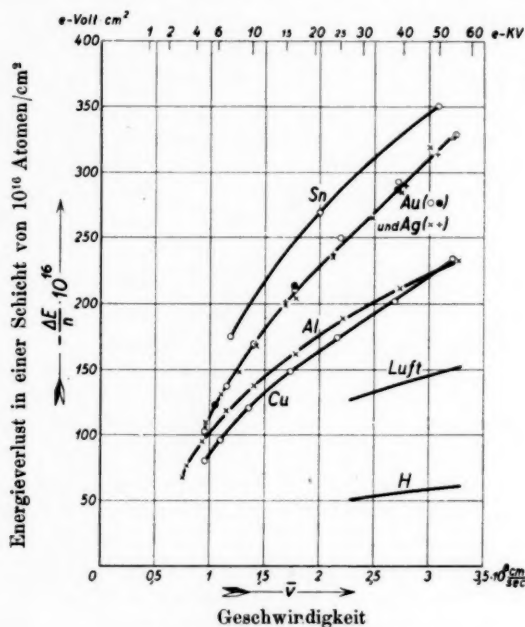


Fig. 9. Atomare Energieverluste in den Metallen Al, Cu, Ag, Sn und Au, ferner in Luft und Wasserstoff nach den Reichweitmessungen von Gerthsen

Wasserstoff eingezeichnet, wie sie sich aus Gerthsens Reichweitmessungen ergeben (vgl. § 3).

b) Fehlerangaben

Die Streuung der Meßpunkte in Fig. 8 und 9 gibt von den Fehlern, mit denen die Meßergebnisse behaftet sein mögen, kein zutreffendes Bild. Sie hängt nur mit einem Teilfehler zusammen, nämlich dem Fehler bei der Relativmessung der Endgeschwindigkeiten. Dieser Fehler ist bei Silber und Gold am größten, was

zum Teil von der Verwendung besonders dünner Folien, zum Teil von später behobenen Mängeln des Meßverfahrens herrührt.

Von allen andern Fehlern verrät die graphische Darstellung nichts, da sie systematischer Art sind. Dies gilt schon von dem Fehler, mit dem die zur Errechnung des Geschwindigkeitsverlustes benützten Relativwerte der Anfangsgeschwindigkeiten behaftet sind. Diese Werte wurden ja nicht einzeln gemessen, sondern nach § 10 aus den Magnetstromstärken i_1 unter Verwendung eines experimentell bestimmten Faktors a errechnet. Der Fehler eines solchen a -Werts geht also in eine Reihe von Verlustwerten ein, und zwar nimmt sein Einfluß zu mit wachsendem Wert von i_1 , also wachsender Geschwindigkeit v . Allerdings ist nur in *einem* Fall zu befürchten, daß er ein beachtliches Ausmaß erreicht, nämlich bei dem größeren Teil der Goldmessungen, weil diese Messungen aus besonderen Gründen mit einem unsicheren a -Wert ausgewertet werden mußten.

Der Fehler, mit dem die Geschwindigkeitsmessungen absolut genommen außerdem noch behaftet sind, mag zwar 3% erreichen, ist aber physikalisch von geringer Bedeutung, da er in allen Geschwindigkeits- und Verlustwerten mit demselben prozentualen Betrag enthalten ist.

Wichtig ist dagegen der Fehler in der Dickenbestimmung der Meßfolien, den das im vorigen Paragraphen beschriebene Ausgleichsverfahren übrig läßt. Es dürfte sich im Durchschnitt auf etwa $\pm 3\%$ belaufen, trägt also in den Vergleich der Bremskräfte verschiedener Substanzen eine erhebliche Unsicherheit hinein.

Eine bemerkenswerte Fehlerquelle ist schließlich noch die Vernachlässigung der Umwege, die in der Gleichsetzung von Strahlenweg und Foliendicke liegt. Einen Anhaltspunkt für die Abschätzung dieses Fehlers gibt der nächste Paragraph.

c) Zahlenmäßige Darstellung der atomaren Verluste

In Ergänzung der in Fig. 8 und 9 gegebenen graphischen Darstellung sollen die Meßergebnisse nun auch noch zahlenmäßig formuliert werden. Für die wichtigsten Energieverluste kann dies am kürzesten in einfachen empirischen Formeln geschehen.

Der Energieverlustkurve für *Kupfer* lassen sich folgende Formeln zur Seite stellen:

$$(19) \quad \frac{AE}{n} \cdot 10^{16} = 0,01416 \sqrt{v - 0,64 \cdot 10^8} \quad e\text{-Volt} \cdot \text{cm}^2$$

und

$$(20) \quad \frac{AE}{n} \cdot 10^{16} = 51 + 56,5 \cdot v \cdot 10^{-8} \quad e\text{-Volt} \cdot \text{cm}^2,$$

von denen die erste für den Geschwindigkeitsbereich $0,9 \cdot 10^8$ bis $2 \cdot 10^8$ cm/sec, die zweite für $2 \cdot 10^8$ bis $3,2 \cdot 10^8$ cm/sec gilt.

Die Energieverluste in *Aluminium* können beschrieben werden durch die Formel:

$$(21) \quad \frac{\Delta E}{n} \cdot 10^{16} = 29,6 + 0,0126 \sqrt{v - 0,66 \cdot 10^8} \quad e\text{-Volt} \cdot \text{cm}^2,$$

die für den ganzen Meßbereich, also von $0,75 \cdot 10^8$ bis $3,3 \cdot 10^8$ cm/sec gilt. Die dieser Gleichung entsprechende Parabel deckt sich zwar nicht exakt mit der Aluminiumkurve der Fig. 9, doch bleiben die Abweichungen innerhalb der Fehlergrenzen der relativen Geschwindigkeitsmessung.

Tabelle 1

Verhältnis der atomaren Verluste in Substanzen mit ähnlichen Verlustkurven

Substanzen	Kanalstrahlgeschw. in Einheiten von 10^8 cm/sec									
	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50	2,75	3,00	3,25
Ag/Cu . . .	1,33	1,35	1,36	1,37	1,37	1,38	1,38	1,39	1,39	1,40
Au/Cu . . .	1,33	1,35	1,37	1,39	1,40	1,41	1,41	1,42	1,42	1,43
Sn/Al	—	1,46	1,49	1,51	1,52	1,53	1,54	1,55	1,55	1,56

In Verbindung mit Tab. 1 liefern die Formeln 19 bis 21 auch die Werte des Energieverlustes in den übrigen untersuchten Metallen, und zwar erhält man die Energieverluste in *Silber* und *Gold* aus denen in Kupfer, die in *Zinn* aus denen in Aluminium, indem man mit der entsprechenden Verhältniszahl multipliziert.

Die Geschwindigkeitsverluste erhält man aus den in Erg ausgedrückten Energieverlusten durch Division mit $m \cdot v$. Ist

$$\frac{\Delta E}{n} \cdot 10^{16} = f(v) e\text{-Volt} \cdot \text{cm}^2 \quad [\text{Form der Gl. (19)–(21)}],$$

so ist

$$(22) \quad \frac{\Delta v}{n} \cdot 10^{16} = 9,574 \cdot 10^{11} \cdot \frac{f(v)}{v} \frac{\text{cm}}{\text{sec}} \cdot \text{cm}^2.$$

d) Das atomare Bremsvermögen

Die Werte des atomaren Bremsvermögens sind in Tab. 2 zusammengestellt, wie sie sich aus Fig. 8 und 9 ergeben. Dabei konnten die Verluste allerdings nur für den Geschwindigkeitsbereich auf Luft bezogen werden, auf den sich die Gerthsenschen Reichweitmessungen erstrecken. Um auch für die niedrigeren Geschwindigkeiten Vergleichswerte zu erhalten, wurden die Luftkurven gewissermaßen proportional zu den Aluminiumkurven extrapoliert, indem hier das Bremsvermögen des Aluminiums als konstant angenommen wurde. Eine gewisse Berechtigung für dieses Verfahren

Tabelle 2

Atomares Bremsvermögen für H-Kanalstrahlen.

Die Bezugswerte in jeder Spalte sind fett gedruckt. Beim Vergleich verschiedener Metalle ist mit einem Fehler von je etwa $\pm 3\%$ zu rechnen

Substanz	Atom- volumen mal 0,1505	Kanalstrahlgeschw. in Einheiten von 18°cm/sec									
		1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50	2,75	3,00	3,25
H ¹⁾	—	—	—	—	—	—	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4
Luft ¹⁾	—	—	—	—	—	1	1	1	1	1	1
Al	1,51	1,51	1,51	1,51	1,51	1,51	1,52	1,53	1,53	1,53	1,53
Cu	1,07	1,25	1,33	1,38	1,40	1,41	1,43	1,46	1,49	1,52	1,55
Ag	1,54	1,67	1,80	1,88	1,92	1,94	1,97	2,02	2,07	2,12	2,16
Sn	2,45	—	2,20	2,25	2,28	2,30	2,32	2,34	2,36	2,37	2,38
Au	1,54	1,67	1,80	1,89	1,95	1,98	2,01	2,06	2,11	2,16	2,20

liegt darin, daß das Bremsvermögen des Aluminiums sich oberhalb 27 e-KV mit wachsender Geschwindigkeit nur wenig ändert; die eigentliche Bezugssubstanz ist aber für den linken Teil der Tabelle das Aluminium.

e) Diskussion der Meßergebnisse

Als Vergleichsmaterial für die mitgeteilten Meßergebnisse kommen in erster Linie die Verhältnisse bei den natürlichen H-Strahlen in Betracht. Da aber das Bremsvermögen für diese Protonen hoher Energie bei allen bisher untersuchten Substanzen weitgehend übereinstimmt mit dem für α -Strahlen gültigen²⁾, so darf man auch das umfassendere Zahlenmaterial, das für die α -Strahlen vorliegt, zum Vergleich heranziehen.

Bei einem solchen Vergleich fällt zunächst auf, daß im Kanalstrahlgebiet die Unterschiede in der Bremswirkung auch bei sehr verschiedener Atomnummer relativ gering sind. An Luft und Wasserstoff hatte das schon Gerthsen gezeigt³⁾. Bei den untersuchten Metallen bleiben die Unterschiede zum Teil überhaupt noch innerhalb der Fehlergrenzen der Dickenbestimmung. Bei 5 e-KV. Kanalstrahlenergie trifft dies sogar zu für den Unterschied zwischen Aluminium, dem leichtesten, und Gold, dem schwersten der untersuchten Metalle. Für Silber ergaben sich Verluste, die nur bei „mittleren“ und „hohen“ Geschwindigkeiten etwa 2% unter denen für Gold liegen, weshalb in Figg. 8 und 9 nur je eine gemeinsame Kurve für

1) Nach den Reichsweitmessungen von Gerthsen.

2) An den hier behandelten Metallen hat das R. Ch. Ghosh gezeigt; vgl. seine Dissertation, Tübingen 1934.

3) Chr. Gerthsen, Ann. d. Phys. [5] 5. S. 661. 1930.

beide Metalle eingezeichnet werden konnte. Die bei den schnellen positiven Strahlen bestehende Tendenz des Bremsvermögens, mit abnehmender Energie sich in Richtung auf den Wert 1 zu ändern, wirkt sich also weiter aus beim Übergang zu Kanalstrahlenergien, und auch innerhalb des hier untersuchten Bereichs ist sie im allgemeinen noch festzustellen, wie Tab. 2 zeigt. Auf diese Weise schrumpft der von den hier behandelten Substanzen umfaßte Bereich des Bremsvermögens von dem Intervall 0,2—3,7 auf das Intervall 0,4—2,2 zusammen. Bezieht man das Bremsvermögen auf Wasserstoff, so wird die Darstellung übersichtlicher: Das Bremsvermögen aller Substanzen nimmt dann mit der Strahlenenergie ab, und zwar bei den hier untersuchten Substanzen von maximal 18,3 auf maximal 5,5.

Allerdings erfolgt diese Annahme nicht bei allen Substanzen im selben Maße. So kommt es, daß die Reihenfolge der nach steigendem Bremsvermögen geordneten Elemente sich beim Übergang zu niedrigen Energien verschiebt. Während das Bremsvermögen für schnelle positive Strahlen mit der Ordnungszahl dauernd zunimmt, und zwar nach den neuesten Messungen von Walker¹⁾ an α -Strahlen ohne Ausnahme, bremst bei den niedrigsten Energien Kupfer weniger als Aluminium, Gold weniger als Zinn. Die Ordnung nach der Atomnummer bahnt sich jedoch schon im hier untersuchten Energiebereich an: Der Unterschied der Bremsvermögen von Aluminium und Kupfer unterschreitet die Fehlergrenze bei etwa 20 e-KV, und auch bei Zinn und Gold ist die verkehrte Reihenfolge wenigstens am Ende des Meßbereichs nicht mehr ganz sicher.

Der Zusammenhang zwischen den Verlusten und der Geschwindigkeit zeigt nämlich nur in groben Zügen bei allen bisher untersuchten Substanzen denselben Charakter; bei genauerer Betrachtung der Diagramme lassen sich deutlich zwei verschiedene Funktionstypen unterscheiden. Den einen Typus beobachtet man bei den Metallen Kupfer, Silber und Gold. Seine Merkmale sind folgende: Der Geschwindigkeitsverlust erreicht seinen Höchstwert erst bei etwa 10 e-KV und nimmt dann mit zunehmender Geschwindigkeit nur langsam ab; die Energieverlustkurve verläuft oberhalb 20 e-KV praktisch linear. Demgegenüber hat der Geschwindigkeitsverlust bei Aluminium sein Maximum schon bei etwa 6 e-KV, seine Abnahme mit wachsender Geschwindigkeit ist stärker und die Energieverlustkurve ist im ganzen Meßbereich deutlich nach oben gekrümmt. Diesem andern Funktionstypus entsprechen auch die Verhältnisse bei Zinn, soweit die Meß-

1) B. I. Walker, Diss. Tübingen 1934.

ergebnisse das zu beurteilen erlauben. Beachtet man, daß die in der Art der Verlustkurven übereinstimmenden Elemente Kupfer, Silber und Gold derselben Gruppe des periodischen Systems, Aluminium und Zinn wenigstens benachbarten Gruppen angehören, so darf man in den beschriebenen Verhältnissen wohl die Andeutung einer Periodizität sehen.

Dieser Eindruck verdichtet sich bei der Betrachtung des atomaren Bremsvermögens. Ordnet man die untersuchten Elemente nach ihrem Bremsvermögen bei den niedrigsten Geschwindigkeiten, so stimmt die Reihenfolge zwar nicht überein mit der Aufeinanderfolge der Ordnungszahlen, dagegen besteht eine klare Übereinstimmung mit der Ordnung nach steigendem Atomvolumen, wie ein Vergleich zeigt zwischen der dritten oder vierten Spalte der Tab. 2 und der zweiten Spalte, deren Zahlen dem Atomvolumen A/s proportional sind¹⁾. Da aber das Atomvolumen der Prototyp der peripheren und deshalb periodischen Atomeigenschaften ist, so gehört offenbar auch die Bremswirkung auf langsame Kanalstrahlen zu dieser Gattung von Eigenschaften.

Schon die wenigen Stichproben, von denen hier berichtet wurde, zeigen also, daß die Wechselwirkung von Protonen mit den Elektronen der durchquerten Materie bei den gewöhnlichen Kanalstrahlgeschwindigkeiten wesentlich anders verläuft als bei den hohen Geschwindigkeiten der natürlichen *H*-Strahlen. Dort weist die monotone Zunahme des Bremsvermögens mit der Ordnungszahl darauf hin, daß nicht nur die äußersten, sondern auch fester gebundene Elektronen am Bremsvorgang in erheblichem Ausmaß beteiligt sind; dagegen dürften in dem hier untersuchten Energiebereich die Einzelprozesse, die in ihrer Summierung den Energieverlust ausmachen, um so mehr auf die äußersten Elektronen der bremsenden Atome beschränkt sein, je geringer die Energie der Teilchen ist. Derselbe Unterschied zeigt sich übrigens auch, wenn man beim Protonenstoß nicht die Rückwirkung auf das stoßende Teilchen, sondern die Wirkung auf das gestoßene Atom ins Auge faßt. Die Anregung der ALK-Strahlung konnte beispielsweise erst für das obere Ende des hier untersuchten Energiebereichs nachgewiesen werden; die hierbei noch sehr geringe Ausbeute steigt aber mit wachsender Protonenenergie immer steiler an²⁾.

1) Eine völlige Proportionalität zwischen Atomvolumen und atomarem Bremsvermögen hätte nach Gl. (18) zur Folge, daß die Energieabnahme dE/dx für alle Substanzen dieselbe wäre. Tatsächlich schwankt die Energieabnahme in den untersuchten Metallen bei 8 e-KV nur zwischen 68 e-Volt/ $m\mu$ bei Kupfer und 93 e-Volt/ $m\mu$ bei Zinn.

2) Vgl. Chr. Gerthsen u. W. Reusse, Phys. Ztschr. 34. S. 478. 1933.

§ 13. Reichweite

a) Der Umwegfaktor

Da für den Reichweitebegriff die schon mehrfach berührte Frage nach der Größe des Umwegfaktors bei Kanalstrahlen von erheblicher Bedeutung ist, sei hier über einen Versuch berichtet, durch Geschwindigkeitsverlustmessungen eine Antwort auf diese Frage zu erlangen.

Bei der zu vorliegender Arbeit angewandten Meßmethode werden ausschließlich solche Strahlen betrachtet, die senkrecht in die Folie eintreten und sie in nahezu derselben Richtung auch wieder verlassen. Überlegt man sich, wie Umwege unter diesen Umständen zustandekommen können, so findet man, daß der Umwegfaktor um so größer sein muß, je größer die Foliendicke und je geringer die Härte der Strahlen ist. Die zu erwartende Zunahme des Umwegfaktors mit der Foliendicke kann aber experimentell nachgeprüft werden.

Eine faltig aufgefangene Folie weist nebeneinander Schichtdicken von exakt ganzzahligem Verhältnis auf. Andererseits erhält man die von hindurchfliegenden Protonen wirklich zurückgelegten Wege aus der Anfangsgeschwindigkeit v_a und den Endgeschwindigkeiten v_e nach der Formel

$$(23) \quad s = \int_{v_a}^{v_e} \frac{dv}{\frac{dv}{dx}},$$

vorausgesetzt, daß man die Geschwindigkeitsabnahme dv/dx für den Bereich vom kleinsten v_e -Wert bis v_a kennt. Merklche Umwege der Kanalstrahlen müssen sich nun darin äußern, daß die so ermittelten Wegstrecken stärker anwachsen als die Reihe der ganzen Zahlen, und man kann sogar die Größe des Umwegfaktors für die verschiedenen Dicken abschätzen, wenn man beachtet, daß die Extrapolation auf sehr kleine Foliendicken den Umwegfaktor 1 ergeben muß.

Die Anwendung dieses Gedankens auf die in Fig. 5 wiedergegebene Messung an einer gefalteten Goldfolie von rund 50μ einfacher Dicke ergibt für die 1-, 2-, 3-, 4-fache Schichtdicke Umwege von bzw. $1\frac{1}{2}$, 5, 10, $13\frac{1}{2}\%$. Dabei betrug die Anfangsenergie $42,9 \text{ e-KV}$, die Endenergien bzw. 34,7, 26,2, 17,9 und $11,6 \text{ e-KV}$. Wenn die genannten Zahlen auch aus verschiedenen Gründen nur als rohe Schätzung zu betrachten sind, so ist doch ihre Größenordnung von den möglichen Meßfehlern unabhängig. Sie geben also immerhin einen Anhaltspunkt für die Beurteilung des Fehlers, den man be-

geht, wenn man den Einfluß des Umwegfaktors außer acht läßt, wie es in vorliegender Arbeit wiederholt geschehen ist.

So wurde in § 11 bei der Ermittlung der Geschwindigkeitsabnahme die in der Folie durchlaufene Weglänge einfach gleich der Schichtdicke gesetzt. Die erhaltenen Werte sind deshalb prinzipiell zu groß, doch bleibt die Abweichung im obersten Drittel des untersuchten Geschwindigkeitsbereichs allgemein innerhalb der Fehlergrenzen, die für die Relativwerte der Geschwindigkeitsverluste gelten. Bei niedrigeren Energien allerdings mag die Deutung der Meßergebnisse durch die Vernachlässigung des Umwegfaktors beeinflusst sein; hier dürften die Werte der wahren differentiellen Geschwindigkeitsabnahme etwas kleiner sein als die Quotienten $\Delta v / \Delta x$, und zwar um so mehr, je schwerer die betrachtete Substanz ist.

Ferner wurde in § 3 bei der Ableitung der Geschwindigkeits- und Energieabnahme in Luft aus dem Gerthsenschen Reichweitengesetz der Umstand ignoriert, daß Gerthsens Reichweiten nicht wirkliche Bahnlängen, sondern zurückgelegte Entfernungen bedeuten. Der Versuch mit der gefalteten Goldfolie lehrt aber, daß diese beiden Größen im allgemeinen nicht nur begreiflich, sondern auch praktisch verschieden sind. In dem vorliegenden besonderen Fall dürfte indessen die Vernachlässigung der Umwegfaktoren ziemlich unschädlich sein. Erstens sind nämlich die Umwege in Luft und Wasserstoff des geringeren Streuvermögens wegen sicher viel kleiner als in Gold und zweitens ist der Einfluß der Umwege auf die Reichweitedifferenzen oberhalb 27 *e*-KV, auf die es bei der Differentiation allein ankommt, zweifellos viel geringer als ihr Einfluß auf die Reichweiten selbst.

Ein weiterer Einwand, den man gegen diese Formeln erheben kann, sei hier noch erwähnt: die Gerthssensche Messung liefert im Prinzip den Höchstwert der Reichweite, die Formeln (5) und (6) geben also nicht die mittlere Geschwindigkeits- und Energieabnahme, sondern etwas kleinere Werte. Die dadurch bedingten Fehler der Werte des atomaren Bremsvermögens dürften aber gegenüber den von der Dickenbestimmung herrührenden zu vernachlässigen sein.

b) Reichweiten in Aluminium

Die Ableitung von Reichweiten der *H*-Kanalstrahlen in Metallen nach der in § 2 angegebenen Formel

$$(1) \quad R(v) = \int_v^{v_r} \frac{dv}{\frac{dv}{dx}}$$

erfordert, daß man zunächst eine Festsetzung über die Restgeschwindigkeit v_r trifft. Man kommt der von Gerthsen angewandten Definition so nah als möglich, wenn man v_r als diejenige Geschwindigkeit bestimmt, bei der die Strahlen die Fähigkeit einbüßen, Luft zu ionisieren. Leider ist es aber praktisch nicht möglich, die Integration bis zu der so definierten Restgeschwindigkeit v_r zu erstrecken, da z. B. die in Fig. 6 wiedergegebene Kurve der Geschwindigkeitsabnahme in Aluminium schon bei rund 3 e-KV oder $0,75 \cdot 10^8$ cm/sec abbricht, während v_r auf alle Fälle wesentlich kleiner ist. Man muß sich deshalb damit begnügen, wenigstens bis zu einer Grenzgeschwindigkeit v_g zu integrieren, die man in der Nähe der Mindestgeschwindigkeit wählen wird, für die sich die Geschwindigkeitsabnahme noch experimentell ermitteln ließ. Man erhält so diejenige Bahnlänge, auf welcher die mittlere Geschwindigkeit von dem Anfangswert v auf den Wert v_g abgebremst wird, oder den Mehrbetrag der mittleren Reichweite gegenüber ihrer Größe bei der Grenzgeschwindigkeit v_g :

$$(24) \quad R(v) - R(v_g) = \int_v^{v_g} \frac{dv}{\frac{dv}{dx}}.$$

Als Beispiel gibt Tab. 3 eine Zusammenstellung, Fig. 10 eine graphische Darstellung der Wegstrecken in Aluminium, die notwendig sind, um H -Kanalstrahlen der Geschwindigkeit v oder der Energie E auf 3 e-KV abzubremesen. Aluminium wurde deshalb gewählt, weil die Kurve der Geschwindigkeitsabnahme sich hier am weitesten zu niedrigen Geschwindigkeiten hin erstreckt und außerdem am wenigsten durch die Vernachlässigung des Umwegfaktors beeinflusst sein dürfte.

Die Kurve des Reichweiteüberschusses ist in ihrem untersten Teil nach oben konvex, und hat bei 6 e-KV einen Wendepunkt, der

Tabelle 3
Reichweiten von H -Kanalstrahlen in Aluminium,
vermindert um die Restreichweite bei 3 e-KV

$v \cdot 10^{-8}$ in cm/sec	E in e-KV	$R(v) - R(3 \text{ e-KV})$ in $m\mu$	$v \cdot 10^{-8}$ in cm/sec	E in e-KV	$R(v - R(3 \text{ e-KV}))$ in $m\mu$
0,758	3,00	0	1,8	16,94	184
0,8	3,34	7,6	2,2	25,3	263
1,0	5,22	41,9	2,6	35,3	347
1,2	7,53	75,6	3,0	47,1	438
1,4	10,25	110	3,4	60,5	535

dem Maximum der Geschwindigkeitsabnahme entspricht. Von da an wird die Zunahme der Reichweite mit wachsender Geschwindigkeit immer größer.

Der obere Teil der Kurve, der zwischen den durch Kreuze bezeichneten Punkten liegt, umfaßt denselben Geschwindigkeitsbereich wie das Reichweitengesetz von Gerthsen. Einem schlüssigen Vergleich steht aber die Verschiedenheit der Reichweitebegriffe entgegen, die allerdings dadurch gemildert wird, daß auch die

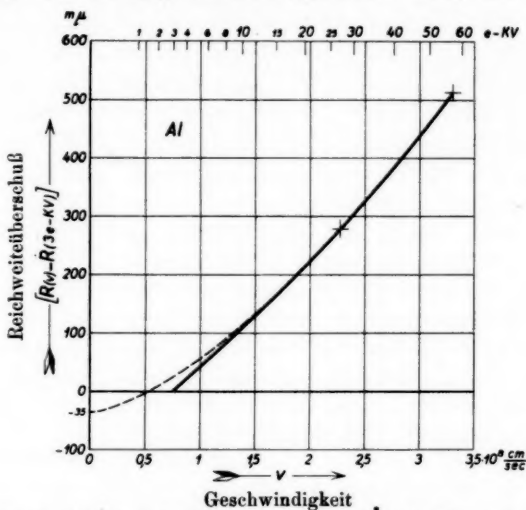


Fig. 10. Reichweitenüberschüsse in Aluminium für die Grenzenergie 3 e-KV¹⁾

Aluminiumkurve nicht den vollen Betrag der wirklichen Weglängen angibt, da ja die ihr zugrunde liegenden Werte der Geschwindigkeitsabnahme selbst schon durch eine Vertauschung von Weglänge und Schichtdicke zustande kamen. Im übrigen zeigt sich, und die gestrichelte Kurve der Fig. 10 demonstriert es, daß auch für die Reichweiten in Aluminium ein $v^{1/2}$ -Gesetz gelte, und zwar schon von 15 e-KV ab, wenn man die Restreichweite bei 3 e-KV zu 35 $m\mu$ annehmen dürfte. Nach Erfahrungen mit dem Spitzenzähler hat sie diese Größenordnung.

Die Reichweiten der H-Kanalstrahlen in einem der andern untersuchten Metalle lassen sich abschätzen, indem man neben der Tab. 3 die Werte des atomaren Bremsvermögens nach Tab. 2 benützt.

1) Die gestrichelte Kurve entspricht der Gleichung:

$$R(v) - R(3 \text{ e-KV}) = (9,08 \cdot 10^{-11} \cdot v^{1/2} - 33) m\mu.$$

Zusammenfassung

Es wird über Geschwindigkeitsverlustmessungen berichtet, die an *H*-Kanalstrahlen von 4–60 *e*-KV durchgeführt wurden. Verwendet wurden Folien aus Aluminium, Kupfer, Silber, Zinn und Gold. Aus den Meßergebnissen wurden Aussagen abgeleitet über die differentielle Geschwindigkeits- und Energieabnahme, die atomare Bremswirkung und die Reichweite. Insbesondere wird gezeigt, daß in der Art der Abhängigkeit des Bremsvermögens von der Atomnummer charakteristische Unterschiede bestehen zwischen dem untersuchten Energiebereich und dem Gebiet der natürlichen *H*-Strahlen. Auf den gleichen Messungen beruhende Aussagen über die Schwankung des Energieverlusts bleiben einer späteren Mitteilung vorbehalten.

Die vorstehende Arbeit wurde von Herrn Prof. Dr. Gerthsen, damals Privatdozent in Tübingen, veranlaßt, und im Physikalischen Institut der Universität Tübingen durchgeführt. Die benutzten Apparate waren zum großen Teil Eigentum der Helmholtzgesellschaft und der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft.

Es ist mir ein Bedürfnis, Herrn Prof. Dr. Gerthsen für die Anleitung zu diesen Untersuchungen, und Herrn Prof. Dr. Geiger, dem Direktor des Tübinger Instituts, für das freundliche Interesse zu danken, mit dem er die Arbeiten insbesondere nach Prof. Gerthsens Weggang begleitet hat.

Gießen, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 15. November 1935)

Ferromagnetische Widerstandserhöhung der Kupfer-Nickel-Legierungen

Von Börje Srensson

(Mit 5 Figuren)

An neun CuNi-Legierungen mit Konzentrationsvariationen von etwa 10% ist der spezifische elektrische Widerstand zwischen 0 und 500° C gemessen worden. Aus den Resultaten nebst den Resultaten der Widerstandsmessungen bei tiefen Temperaturen von Krupkowski und de Haas wird die ferromagnetische Widerstandserhöhung in seiner Abhängigkeit von der Konzentration berechnet.

§ 1. Einleitung

Der elektrische Widerstand eines reinen ferromagnetischen Metalles setzt sich nach Anschauungen, die von Johansson¹⁾ und Borelius²⁾ geäußert sind, aus einem normalen thermischen Anteil ϱ_T und einem ferromagnetischen Anteil ϱ_F zusammen. Ebenso kann bekanntlich der Widerstand einer nicht ferromagnetischen Mischkristallegierung natürlich zerlegt werden in den auf der Atommischung beruhenden Widerstand ϱ_M am absoluten Nullpunkt und einen temperaturabhängigen Anteil ϱ_T , der sich im einfachsten Falle nach dem Gesetz von Matthiessen ähnlich dem Widerstand eines normalen reinen Metalles verhält. Es liegt dann nahe, den Widerstand einer ferromagnetischen Mischphase in die drei Teile

$$(1) \quad \varrho = \varrho_M + \varrho_T + \varrho_F$$

zu zerlegen, wo ϱ_M der Mischkristallwiderstand am absoluten Nullpunkt, ϱ_T ein mehr oder weniger normaler thermischer Widerstandsanteil und ϱ_F der ferromagnetische Anteil ist. Auf Grund der Meßresultate an Ni von Cabrera und Torroja³⁾ sowie Gerlach und Schneiderhan⁴⁾ kann der ferromagnetische Widerstandsanteil ϱ_F des reinen Metalles

$$(2) \quad \varrho_F = \text{const} (\sigma_0^2 - \sigma_T^2)$$

geschrieben werden, wo σ_0 und σ_T die spontane Magnetisierung am absoluten Nullpunkt und bei der Temperatur T bezeichnen. σ_T geht mit steigender Temperatur gegen Null und ϱ_F erreicht somit einen maximalen Endwert. Gewisse Verhältnisse um den Curiepunkt

herum in reinem Ni wurden in einer früheren Arbeit des Verfassers⁶⁾ untersucht. Bei den ferromagnetischen Mischphasen scheinen ähnliche Verhältnisse vorzuliegen und es ist vor allem das Ziel der vorliegenden Untersuchung, den Endwert von ϱ_F in seiner Abhängigkeit von der Konzentration bei den CuNi-Legierungen festzustellen.

Um dieses zu erreichen, sind Widerstandsmessungen bei verschiedenen Konzentrationen von den tiefsten Temperaturen bis hinreichend hoch über den Curiepunkt hinaus notwendig. Das System CuNi ist nun schon von Chevenard⁶⁾ zwischen -195 und $+1000^\circ\text{C}$ untersucht worden. Es hat aber das dabei verwandte Nickel $0,5\%$ Mn enthalten, und weiter sind die Widerstandsresultate, die mit einer Registriervorrichtung erhalten wurden, nur in Kurvenbildern veröffentlicht worden, die für den genannten Zweck weniger gut verwendbar sind. Gut verwendbares Material liegt dagegen durch die Messungen von Krupkowski und de Haas⁷⁾ für das Temperaturgebiet -258 bis 0°C vor. Die vorliegende Untersuchung komplettiert dieses Material durch Messungen zwischen 0 und 500°C , wobei der Vollständigkeit halber auch das für die gestellte Frage unwesentliche Konzentrationsgebiet von 0 — 40 Atom-Prozent Ni mitgenommen worden ist. Die Messungen geben das Verhältnis der Widerstände bei t und 0°C . Die Absolutwerte für die Legierungen sind durch Hinzunahme der Resultate der Messungen bei 0°C ermittelt worden. Bei reinem Kupfer und Nickel wurden aber keine Absolutmessungen ausgeführt.

§ 2. Die Legierungen

Das Nickel war von Hilger in London bezogen worden und enthielt nach dem beigegebenen Analysenschein $0,102\%$ Fe und insgesamt $0,036\%$ Mg, Ca, Cu und Si. Das Kupfer war technisch rein mit ausgewählt kleinem Widerstand und es wurde auch noch die magnetische Suszeptibilität kontrolliert und richtig gefunden. Die auf $0,1$ mg abgewogenen Metalle wurden in evakuierten und zugeschmolzenen Quarzröhrchen in einem Hochfrequenzofen zu Schmelzstücken von etwa 1 g Masseninhalte zusammengeschmolzen. Die Gewichtsverluste waren höchstens $0,8$ mg und der Fehler in der berechneten Konzentration war deshalb höchstens $0,08$ Atom-Prozent. Die Schmelzstücke wurden 20 — 24 Stunden bei 1050 — 1100°C homogenisiert und dann zu viereckigen Drähten von etwa 10 cm Länge und 1 mm Dicke ausgewalzt. Die wenig duktilen Legierungen mit 60 und 70% Ni mußten beim Auswalzen wiederholt ausgeglüht werden. Nach der Herstellung wurden die nickelreichen Drähte bei 900 , die kupferreichen bei 600°C ausgeglüht.

§ 3. Die Messungen

Das Anbringen der Probedrähte bei der Messung ist in der Fig. 1 angegeben. Die Spannungsabnahme geschah durch zwei Nickelschneiden, an die der Draht durch eine kupferne Einspannvorrichtung gepreßt wurde. Die Schneiden und Einspannanordnungen waren mit Glimmer dünn isoliert, an zwei halbzyllindrischen Kupferblöcken befestigt die mit einem Steuerstift beweglich zusammengehalten wurden. Durch diese Beweglichkeit wurden Verschiebungen der Anliegepunkte der Schneiden vermieden. Diese Anordnung war in ein evakuiertes Quarzrohr eingeschoben und wurde in einem mit Wechselstrom betriebenen Platinrohrföfen erwärmt. Um konstante Temperatur längs dem Draht zu erhalten war das Quarzrohr von einem dickwandigen Kupferrohr umgeben. Die vom Heizstrom erzeugte Feldstärke am Ort des Probedrahtes war höchstens 2,5 Oe.

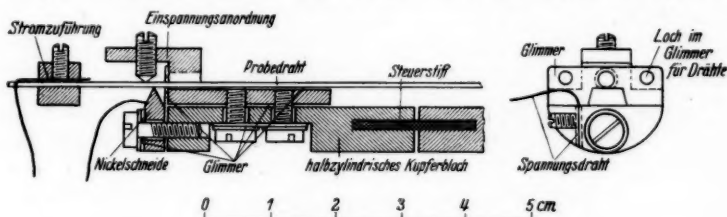


Fig. 1. Meßanordnung

Die Widerstandsmessung geschah bei einigen Proben mit einer Thomsonschen Doppelbrücke von Wolf, wobei für die Widerstände der Zuleitungsdrähte aus Nickel kleine Korrekturen anzubringen waren. Bei anderen Proben wurde eine Kompensationsanordnung, ebenfalls von Wolf, benutzt. Der Meßstrom betrug in beiden Fällen etwa 0,06 Amp.

Die Temperaturmessung geschah mit einem Pt-PtRh-Element, dessen Schweißstelle elektrisch isoliert an der Mitte des Probedrahtes befestigt war. Die Spannung wurde mit dem Kompensationsapparat gemessen. Von zwei verschiedenen Thermoelementen, die zur Verwendung kamen, wurde das eine bei den Siedetemperaturen des Wassers, des Naphthalins, des Benzophenons und des Schwefels kalibriert und das andere bei der Siedetemperatur des Wassers und den Schmelzpunkten von reinem Zinn, Cadmium und Zink.

Die Widerstände wurden im allgemeinen in Temperaturabständen von etwa 10° gemessen. In der Umgebung des Curiepunktes wurden aber Messungen für jeden Grad ausgeführt, und in Gebieten, wo die Widerstandstemperaturkurve besonders geradlinig verläuft, sind

auch größere Intervalle als 10° genommen worden. Die Kurven für steigende und fallende Temperatur decken sich auch in der Umgebung des Curiepunktes gut, und es konnte keine Hysterese festgestellt werden.

§ 4. Zusammenstellung der Resultate

Für die Legierungen wurden aus den beobachteten Größen R_t , R_0 und ϱ_0 die Größe ϱ_t R_t/R_0 berechnet und gegen die Temperatur in großem Maßstabe eingezeichnet. Die spezifischen Widerstände bei 0°C ϱ_0 sind nicht so genau wie die relativen Größen R_t/R_0 . Aus den gezogenen Kurven wurden die in die Tab. 1 eingeführten Werte für die Temperaturen $50, 100^\circ\text{C}$ usw. ermittelt.

Für das reine Kupfer stimmen die erhaltenen Werte von R_t/R_0 gut mit früheren Messungen an reinstem Kupfer, und es wurde der Holbornsche Wert $\varrho_0 = 1,55$ [Tabelle Landolt-Börnstein⁶⁾] angenommen.

Für das Nickel, das zu der Herstellung der Legierungen gedient hatte, habe ich früher⁵⁾ die Werte $\frac{R_t}{R_0} = 1,637$ bei 100°C , 2,341 bei 200° , 3,38 bei 300° , 4,62 bei 400°C , 5,19 bei 500° erhalten. Die Werte sind kleiner als die von Holborn an einem von Mylius gereinigten Nickel erhaltenen. Ich habe es deshalb vorgezogen, in Tab. 1 die Holbornschen Werte aus den Tabellen von Landolt-Börnstein⁶⁾ für reines Ni anzuführen, wobei die Werte für 50, 150, 250 und 350 mit Hilfe meiner Messungen interpoliert worden sind.

Aus den Differenzen der Zahlen der Tab. 1 sind Näherungswerte für die Temperaturderivate des Widerstands ($d\varrho/dt$) berechnet und in Tab. 2 aufgeführt worden.

Tabelle 1

$$\varrho_t = \varrho_0 \cdot \frac{R_t}{R_0} \text{ in Mikroohm} \cdot \text{cm}$$

Atom-% Ni	0	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500°C
0	1,55	1,88	2,22	2,56	2,90	3,24	3,58	3,92	4,28	4,64	5,00
11,56	14,48	14,81	15,14	15,48	15,82	16,15	16,49	16,82	17,16	17,49	17,83
22,78	27,31	27,64	27,92	28,16	28,40	28,62	28,85	29,08	29,31	29,53	29,78
31,89	37,70	38,01	38,22	38,44	38,65	38,86	39,07	39,28	39,50	39,72	39,94
41,62	47,13	47,07	47,00	46,89	46,85	46,86	46,99	47,19	47,48	47,81	48,17
51,78	52,55	52,53	52,56	52,47	52,41	52,42	52,49	52,71	53,13	53,59	53,99
60,20	51,40	51,80	52,08	52,27	52,47	52,69	52,81	53,02	53,49	54,01	54,57
71,90	40,22	44,90	47,73	48,70	49,34	49,97	50,60	51,23	51,86	52,49	53,13
80,46	28,96	33,02	37,80	42,75	44,44	45,54	46,39	47,27	48,17	49,05	49,92
90,39	16,96	19,98	23,22	26,96	31,38	36,79	38,74	40,10	41,34	42,52	43,68
100	6,58	8,65	11,0	13,6	16,7	20,3	24,1	28,8	31,5	—	—

Tabelle 2

$$\frac{\rho_{t+25} - \rho_{t-25}}{50} \text{ in } \Omega \cdot \text{cm} \cdot 10^{-8}/\text{Grad}$$

Atom-% Ni	25	75	125	175	225	275	325	375	425	475 ° C
0	0,66	0,68	0,68	0,68	0,68	0,68	0,68	0,68	0,72	0,72
11,56	0,66	0,66	0,68	0,68	0,66	0,68	0,66	0,68	0,66	0,68
22,78	0,66	0,64	0,48	0,48	0,44	0,46	0,46	0,46	0,44	0,46
31,89	0,62	0,42	0,44	0,42	0,42	0,42	0,42	0,44	0,44	0,44
41,62	-0,12	-0,14	-0,22	-0,08	+0,02	0,26	0,40	0,58	0,64	0,72
51,78	-0,04	-0,06	-0,06	-0,12	+0,02	0,14	0,44	0,84	0,92	0,80
60,20	+0,80	0,56	0,38	0,40	0,44	0,44	0,42	0,94	1,04	1,12
71,90	9,36	5,66	1,94	1,28	1,26	1,26	1,26	1,26	1,30	1,28
80,46	8,12	9,56	9,90	3,38	2,20	1,70	1,76	1,80	1,76	1,74
90,39	6,04	6,48	7,38	8,94	10,82	3,90	2,72	2,52	2,36	2,32
100	4,14	4,6	5,2	6,2	7,2	7,60	9,4	5,2	—	—

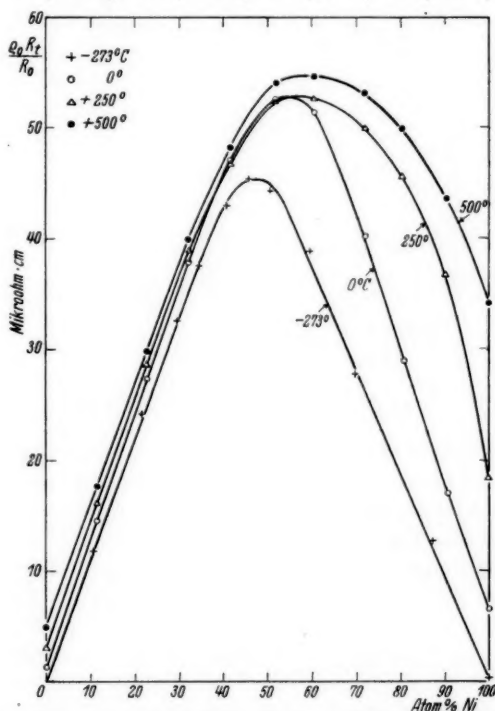


Fig. 2. Isotherme Widerstandskonzentrationskurven

Fig. 2 zeigt die Widerstandskonzentrationskurven für 0, +250 und 500° C sowie auch die aus den Messungen von Krupkowski

und de Haas⁷⁾ extrapolatorisch erhaltene Kurve für den absoluten Nullpunkt. Fig. 3 gibt eine Übersicht der Widerstandstemperaturkurven.

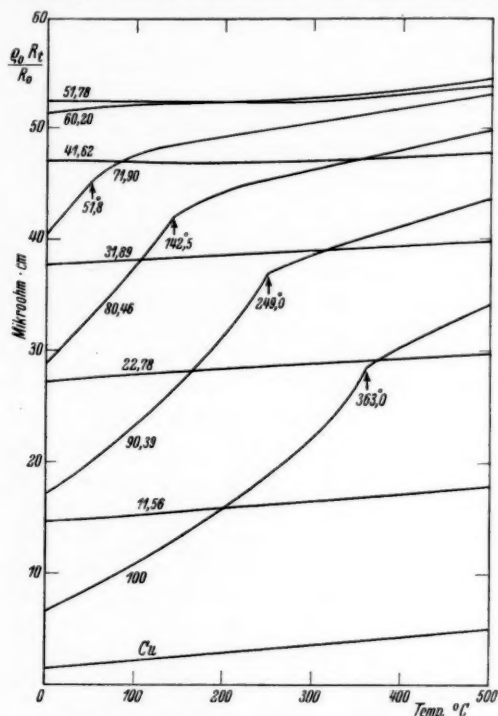


Fig. 3. Widerstands-Temperaturkurven

§ 5. Berechnung der ferromagnetischen Widerstandserhöhung

Die ferromagnetische Widerstandserhöhung ist aus den experimentellen Resultaten nach der Anweisung von Borelius²⁾ berechnet worden, und die Berechnungsweise soll durch die Fig. 4, die sich auf die Legierung mit 80,46% Ni als Beispiel bezieht, erläutert werden. Von den empirischen Widerstandswerten ist zuerst der aus den Messungen von Krupkowski und de Haas ermittelte Nullpunkts-widerstand ρ_M abgezogen. Die lineare Temperaturabhängigkeit des Widerstandes oberhalb des Curiepunktes wird dem normalen thermischen Widerstandsanteil ρ_T zugeschrieben. Es wird angenommen, daß ρ_T bei nicht zu tiefen Temperaturen wie bei reinen Metallen

$$\rho_T = \text{const} \cdot \left(T - \frac{0,17 \Theta}{1,17} \right) = \text{const} \cdot (T - 0,145 \Theta)$$

geschrieben werden kann. Die charakteristische Temperatur Θ wird für Cu zu 315 und für Ni zu 370 gesetzt und mit der Atomkonzentration linear

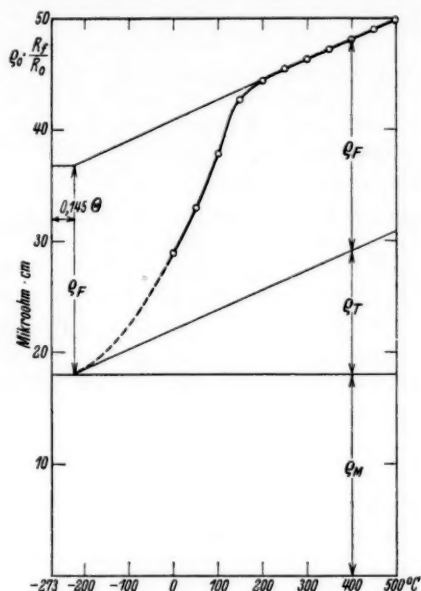


Fig. 4. Zerlegung des Widerstands der Legierung mit 80,46% Ni

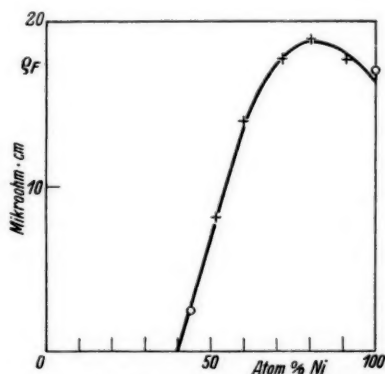


Fig. 5. Konzentrationsabhängigkeit der magnetischen Widerstandserhöhung
veränderlich angenommen. Für die Legierung mit 80,46% Ni wird somit $0,145 \Theta = 52$. Die zu $T = 52$ rückwärts ausgezogene lineare

Widerstandskurve über dem Curiepunkt gibt (nach Abzug von ϱ_M) die maximale ferromagnetische Widerstandserhöhung ϱ_F .

Für die übrigen Konzentrationen sind die ϱ_F in ähnlicher Weise ermittelt worden und die Tab. 3 enthält die Resultate. Für reines Ni ist ϱ_F aus den von Borelius²⁾, auf Grund der Widerstandsmessungen von Holborn⁹⁾ und den magnetischen Messungen von Weiss, Forrer und Kamerlingh-Onnes¹⁰⁾ aufgestellten Gleichungen berechnet worden.

Die Konzentrationsabhängigkeit von ϱ_F wird in der Fig. 5 gezeigt. Während das magnetische Moment σ_0 pro Grammatom der Legierung am absoluten Nullpunkt nach den Messungen von Alder¹¹⁾ von 40—100 Atom-Prozent Ni linear ansteigt, hat die ferromagnetische Widerstandserhöhung ein Maximum bei etwa 80% Ni. Die Kurve erinnert an die Konzentrationskurven des Mischkristallwiderstandes und gibt einen Beitrag neuer Art zu der empirischen Unterlage für die Entwicklung der Theorie der Leitung und des Ferromagnetismus.

Tabelle 3

Zur Berechnung der magnetischen Widerstandserhöhung

Atom- % Ni	θ	ϑ 0,145	ϱ_M	ϱ_F	Für die Berechnung von ϱ_F benutztes Temperaturgebiet °C	Nach Messungen von
44,7	339	49	44,7	2,4	-183— 0	Krupkowski u. de Haas
51,78	343,5	50	44,5	8,1	0—300	Svensson
60,20	348	50,5	37,0	14,0	100—350	"
71,90	354,5	51,5	26,2	17,8	200—500	"
80,46	359	52	17,9	18,9	200—500	"
90,39	366,5	53	9,0	17,7	300—500	"
100	370	53,5	0	8,0	0—400	Holborn

Dem Direktor des Institutes, Herrn Prof. Dr. G. Borelius, auf dessen Veranlassung diese Untersuchung ausgeführt worden ist, sage ich für sein freundliches Entgegenkommen beim experimentellen Teil und für die wertvollen Ratschläge bei der theoretischen Bearbeitung der experimentellen Resultate meinen herzlichsten Dank. Dem Mechaniker, Herrn Helge Berg, der mir bei den langen Beobachtungsreihen mit großem Interesse behilflich war, spreche ich meinen besten Dank aus.

Literaturverzeichnis

- 1) C. H. Johansson, *Ann. d. Phys.* [4] **84**, S. 976. 1927.
- 2) G. Borelius, *Ann. d. Phys.* [5] **8**, S. 261. 1931.
- 3) B. Cabrera u. J. Torroja, *Ann. Soc. Espan. Fisica* **9**, S. 1. 1913;
11. S. 443 und S. 525. 1913.
- 4) W. Gerlach u. K. Schneiderhan, *Ann. d. Phys.* [5] **6**, S. 5 u. S. 772.
1930; W. Gerlach, *Phys. Ztschr.* **33**, S. 953. 1932.
- 5) B. Svensson, *Ann. d. Phys.* [5] **22**, S. 97. 1935.
- 6) P. Chevenard, *The Journ. of the Inst. of Metals* **36**, S. 39. 1926;
Chaleur et Industrie (Comptes Rendus du Congrès du Chauffage Industriel)
4, S. 157. 1923.
- 7) A. Krupkowski u. W. J. de Haas, *Comm. Leiden* **194**, S.1. 1928.
- 8) Landolt-Börnstein, *Physik-Chem.-Tabellen*, 5. Aufl. S. 1050. 1923.
- 9) L. Holborn, *Ztschr. f. Phys.* **8**, S. 58. 1921.
- 10) P. Weiss u. A. Forrer, *Ann. de Phys.* **5**, S. 153. 1926; P. Weiss
u. H. Kamerlingh-Onnes, *Journ. de Phys.* **9**, S. 555. 1910.
- 11) M. Alder, *Diss.* 1916 Zürich.

Stockholm, Physikalisches Institut der Technischen Hochschule, August 1935.

(Eingegangen 23. November 1935.)

Über die Stoßverbreiterung der Rayleighstreuung komprimierter Gase

*Bemerkung zu der Arbeit von J. Weiler „Die Intensitätsverteilung
in den Rayleighlinien komprimierter Gase“¹⁾*

Von E. Kappler

(Mit 3 Figuren)

In einer kürzlich erschienenen Arbeit hat Weiler¹⁾ über Versuche berichtet, welche die Bestimmung der Intensitätsverteilung der Rayleighlinien von komprimierten Gasen zum Gegenstand haben. Folgender Sachverhalt gab die Anregung zu diesen Versuchen. Die an Gasen und Flüssigkeiten — einatomige Substanzen ausgenommen — gestreuten Rayleighlinien sind mehr oder weniger stark verbreitert.

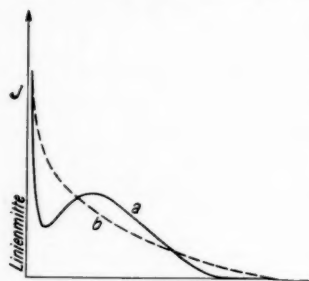


Fig. 1

Bei hinreichend verdünnten Gasen ergibt sich nun ein Intensitätsverlauf analog der Kurve *a* der schematischen Fig. 1 mit einem seitlichen Maximum. Dieser Befund wird von der von Manneback²⁾ und Placzek und Teller³⁾ entwickelten Theorie, die sich auf Gase ohne gegenseitige Wechselwirkung der Moleküle bezieht, befriedigend wiedergegeben und läßt sich als Rotationsramaneffekt deuten; in manchen Fällen gelang es auch, die sog. „Flügel“ der

Rayleighlinien in einzelne diskrete Rotationslinien aufzulösen. Anders ist es bei manchen Flüssigkeiten. Hier findet man einen Intensitätsverlauf nach Kurve *b* (Fig. 1), für welchen bis heute noch keine befriedigende Erklärung existiert. Es sind zwar mehrere Vorschläge zu einer Deutung gemacht worden, welche mit den Worten „Stoßverbreiterung“⁴⁾, „behinderte Rotation“⁵⁾, „quasikristalline Struktur“⁶⁾,

1) J. Weiler, Ann. d. Phys. [5] **23**, S. 493. 1935. Vgl. auch S. Bhagavantam und A. V. Rao, Proc. Ind. Acad. Sc. **1**, S. 419. 1935.

2) C. Manneback, Ztschr. f. Phys. **62**, S. 224. 1930.

3) G. Placzek u. E. Teller, Ztschr. f. Phys. **81**, S. 209. 1933.

4) S. Bhagavantam, Indian Journ. of Phys. **6**, S. 319. 1931.

5) S. Bhagavantam, Proc. Ind. Acad. Sc. **2**, S. 63. 1935.

6) E. Gross u. M. Vuks, Nature **135**, S. 100 u. 431. 1935.

„Komplexbildung“¹⁾ gekennzeichnet sein mögen. Eine eingehendere Durchführung dieser Gedanken ist aber bisher noch nicht unternommen worden. Die an komprimierten Gasen gemachten Versuche²⁾ sollten einen Beitrag zur Lösung dieses Problems liefern. Sie ergaben mit wachsendem Druck einen stetigen Übergang vom Intensitätsverlauf a in denjenigen von b . Bei diesen Versuchen scheint nun der Gedanke an Stoßverbreiterung naheliegend zu sein. Im folgenden soll dies näher untersucht werden. Bei Anwendung der Lorentzschen Theorie der Stoßverbreiterung auf die Rayleighstrahlung eines Gases sind zwei Dinge zu untersuchen. Ausgehend von der an verdünnten Gasen gefundenen Intensitätsverteilung a muß zunächst festgestellt werden, ob die mit unveränderter Frequenz gestreute Strahlung durch Zusammenstöße verbreitert wird. Denn bedenkt man, daß dieser Anteil der Streustrahlung ungefähr 1000mal intensiver ist als die Flügel, so kann eine auch nur geringe Verbreiterung der unverschobenen Rayleighlinie das Maximum der Kurve a zum Verschwinden bringen. Sodann muß eine eventuelle Verbreiterung der einzelnen Rotationslinien, aus denen die seitlichen Flügel der Rayleighlinie sich zusammensetzen, untersucht werden.

Stoßverbreiterung der unverschobenen Streustrahlung

Die unverschobene Streustrahlung eines optisch anisotropen Moleküls setzt sich aus zwei Anteilen zusammen: der polarisierten Tyndallstreuung und dem depolarisierten Q -Zweig der Anisotropiestreuung. Erstere rührt von der mittleren Polarisierbarkeit $\bar{\alpha} = \frac{1}{3}(\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z)$ her; die α_x bedeuten die 3 Hauptpolarisierbarkeiten des Moleküls (wir beschränken unsere Betrachtungen auf solche Moleküle, für welche ein Hauptachsensystem (XYZ) der Polarisierbarkeiten existiert); für den Q -Zweig ist der spurfreie Anteil der Polarisierbarkeit verantwortlich³⁾.

Bei der Frage nach der Stoßverbreiterung der polarisierten Rayleighstreuung können wir uns auf optisch isotrope Moleküle beschränken. Die Antwort ist in der Theorie der Stoßverbreiterung von Absorptionslinien schon enthalten. Nach der klassischen Theorie der Stoßverbreiterung stellen wir uns ein Molekül als einen gedämpften Oszillator vor, dessen Eigenfrequenz ω_0 und dessen Eigendämpfung γ_0 sein mögen. Erleidet dieser Oszillator im Mittel pro sec z Zusammenstöße, so berechnet sich seine Polarisierbarkeit α zu

$$\alpha = \frac{e^2}{m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i(\gamma_0 + 2z)\omega_0}.$$

1) G. Placzek u. W. R. van Wijk, Ztschr. f. Phys. 70. S. 287. 1931.

2) Vgl. Fußnote 1, S. 272.

3) Einzelheiten vgl. bei M. Born, Optik, Berlin 1933, Julius Springer.

Da bei der Rayleighstreuung die eingestrahle Frequenz ω meistens von der Eigenfrequenz ω_0 weit entfernt ist, so ist

$$\omega_0^2 - \omega^2 \gg (\gamma_0 + 2z)\omega_0;$$

die Polarisierbarkeit wird durch Druck nicht geändert und die Intensität der Streustrahlung ist proportional $\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$. Ist die eingestrahle Linie hinreichend schmal, so hat auch die gestreute Linie denselben Intensitätsverlauf wie die eingestrahle. Die polarisierte Rayleighstrahlung ist also nicht druckverbreitert, ein Ergebnis, das wir auch schon aus der Tatsache hätten schließen können, daß der Brechungsindex durch Druck nicht geändert wird. Es ist bekanntlich

$$\alpha = \frac{3}{4\pi N} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}.$$

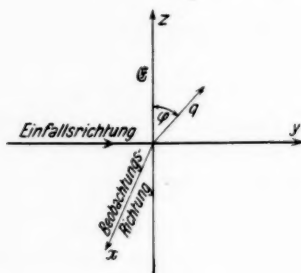


Fig. 2

Auf ähnliche Weise läßt sich zeigen, daß auch der Q -Zweig der Anisotropiestreuung durch Druck nicht verbreitert wird. Um dies zu sehen, müssen wir zuerst die Intensität der von einem anisotropen Molekül gestreuten Strahlung berechnen¹⁾. Das Licht falle in der y -Richtung (Fig. 2) eines raumfesten Koordinatensystems (x, y, z)

ein; der elektrische Vektor schwinde in der z -Richtung; wir beobachten in der x -Richtung. Die Komponente des induzierten Momentes p in irgendeiner Richtung q senkrecht zur Beobachtungsrichtung x [q ist ein Einheitsvektor in der (z, y) -Ebene] ist:

$$(p q) = p_x q_x + p_y q_y + p_z q_z = \sum_x \sum_y \alpha_{xy} \mathcal{E}_y \cdot q_x,$$

dabei bedeuten die α_{xy} die auf das raumfeste System bezogenen Polarisierbarkeiten. Die Intensität des in der Richtung q polarisierten Anteils der Streustrahlung ist also proportional $|p q|^2$, wobei die Mittelung über alle Lagen im Raum auszuführen ist. Die Rechnung ergibt

$$|p q|^2 = |\mathcal{E}|^2 \left\{ \left(\Omega_0 + \frac{\Omega}{3} \right) \cos^2 \varphi + \Omega \right\}, \quad \text{wo}$$

$$(1) \quad \Omega_0 = \bar{\alpha}^2 = \frac{1}{9} (\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z)^2,$$

$$\Omega = \frac{1}{30} \{ (\alpha_y - \alpha_z)^2 + (\alpha_z - \alpha_x)^2 + (\alpha_x - \alpha_y)^2 \},$$

1) Vgl. M. Born, a. a. O.

φ ist der Winkel zwischen \mathfrak{E} und q . Dabei rührt der polarisierte Anteil der Streustrahlung von Ω_0 , der depolarisierte Anteil von Ω her. Die reine Tyndallstreuung bzw. die Anisotropiestreuung erhalten wir demnach, wenn wir Ω bzw. $\Omega_0 = 0$ setzen. Die Ausdrücke für Ω_0 und Ω sind aber schon spezialisiert für den Fall, daß die α_X rein reelle Zahlen sind, was physikalisch bedeutet, daß die Frequenz des einfallenden Lichtes von einer Eigenfrequenz des Moleküls weit entfernt ist.

Das klassische Modell eines anisotropen Moleküls ist der anisotrope Oszillator. Wir nehmen in den drei Hauptachsen des Polarisierbarkeitsellipsoids drei verschiedene Eigenfrequenzen und Eigendämpfungen ω_{0X} , γ_{0X} usw. an. Dann berechnen sich die 3 Hauptpolarisierbarkeiten bei einem ungestörten Molekül zu

$$\alpha_X = \frac{e^2}{m} \frac{1}{\omega_{0X}^2 - \omega^2 + i\gamma_{0X}\omega_{0X}}; \quad \alpha_Y = \dots; \quad \alpha_Z = \dots$$

Erleidet das Molekül einen Zusammenstoß, so wird 1. seine Ausstrahlung abgebrochen, um sofort wieder neu einzusetzen, wobei die gedämpfte Eigenschwingung des Moleküls mitangeregt wird; 2. wird im allgemeinen seine Orientierung im Raum sich ändern. Der erste Umstand bewirkt eine Änderung der Hauptpolarisierbarkeiten α_X , welche infolge der abklingenden Eigenschwingung die Zeit τ enthalten werden, die seit dem letzten Stoß vergangen ist. Der zweite Umstand ändert die auf das raumfeste System bezogenen Polarisierbarkeiten α_{xy} .

Bei der Berechnung der Intensität der Streustrahlung nach Formel (1) haben wir 2 Mittelungen durchzuführen, einmal über die verschiedenen Zeiten τ zwischen 2 Zusammenstößen, dann über die verschiedenen räumlichen Orientierungen. Beide Mittelungen können aber getrennt ausgeführt werden, da die Änderung in der räumlichen Orientierung durch einen Stoß unabhängig ist von der seit dem letzten Stoß vergangenen Zeit τ . Somit gelangen wir auch zu dem gesuchten Ergebnis, wenn wir uns denken, das Molekül erleide nacheinander viele Zusammenstöße, ohne daß seine Orientierung im Raum geändert wird; wir mitteln über die verschiedenen Zeiten τ und erhalten als Hauptpolarisierbarkeiten:

$$\bar{\alpha}_X^\tau = \frac{e^2}{m} \frac{1}{\omega_{0X}^2 - \omega^2 + i(\gamma_{0X} + 2z)\omega_{0X}}; \quad \bar{\alpha}_Y^\tau = \dots; \quad \bar{\alpha}_Z^\tau = \dots;$$

sodann lassen wir das Molekül alle möglichen Lagen im Raum annehmen und mitteln darüber. Aus denselben Gründen, wie sie oben

bei der reinen polarisierten Tyndallstreuung besprochen wurden, wird auch beim Q -Zweig keine Stoßverbreiterung zu erwarten sein, solange die eingestrahlte Frequenz von den Eigenfrequenzen weit genug entfernt ist. Denn dann sind die α_x^2 reell und praktisch vom Druck unabhängig, und wir können zur Berechnung der Intensität die Formel (1) verwenden. In der folgenden Arbeit¹⁾ werden diese Schlußfolgerungen experimentell bestätigt.

Stoßverbreiterung der frequenzverschobenen Rotationslinien

Die Rotations-Raman-Linien kommen dadurch zustande, daß bei der Rotation eines optisch anisotropen Moleküls die auf ein raumfestes System bezogenen Polarisierbarkeiten α_{xy} sich zeitlich ändern (und zwar definitionsgemäß nur der spurfreie Anteil). Dadurch wird die Streustrahlung im Rhythmus der doppelten Rotationsfrequenz moduliert. Wir werden nachher unsere Betrachtungen auf ein CO_2 -Molekül anwenden, welches einen Rotator darstellt. In diesem Falle läßt sich die Rotation des Moleküls immer mit einer einzigen Rotationsfrequenz ω_r beschreiben, und in der Anisotropiestreuung treten die Frequenzen $\omega + 2\omega_r$ und $\omega - 2\omega_r$ auf. Zu jeder Rotationsfrequenz gehören je 2 Rotationslinien, deren Intensität proportional der Häufigkeit ist, mit der die einzelnen Rotationszustände vorkommen. Das Zustandekommen einer Stoßverbreiterung der Rotationslinien kann man sich folgendermaßen denken. Infolge von Zusammenstößen wird das Molekül in seiner Rotation dauernd gestört. Die über eine lange Zeit beobachtete Rotation läßt sich dann nicht mehr durch eine einzige Rotationsfrequenz beschreiben und ebenso stellt der zeitliche Verlauf des spurfreien Anteils der Polarisierbarkeit keine reine Sinusfunktion mehr dar, sondern er setzt sich aus einzelnen willkürlich abgebrochenen Sinusfunktionen zusammen. Die Fourierzerlegung liefert genau wie bei der Berechnung der Stoßverbreiterung von Emissionslinien für den mittleren zeitlichen Verlauf des spurfreien Anteils an Stelle einer einzigen Rotationsfrequenz ω_r ein kontinuierliches Band von Rotationsfrequenzen ω_r , deren Intensität proportional ist

$$\frac{1}{(\omega_r - \omega_{ir})^2 + z^2} + \frac{1}{(\omega_r + \omega_{ir})^2 + z^2}.$$

Während bei der Stoßverbreiterung von Lichtwellen wegen $\omega_{ir}^2 \gg z^2$ das zweite Glied vernachlässigt werden kann, dürfen wir dies bei der Fourierzerlegung der Rotation eines Moleküls nicht mehr tun, weil bei hohen Gasdrucken, wie sie in unserem Falle vorliegen, die

1) E. Kappler und J. Weiler, Ann. d. Phys. [5] 25. S. 279. 1936.

Stoßzahl von der Größenordnung der Rotationsfrequenzen ist. Das zweite Glied macht aber die Verteilungskurve der ω_r unsymmetrisch zugunsten der kleineren Frequenzen und wir können erwarten, daß mit steigendem Druck diejenigen Rotationslinien, welche in der Nähe der Primärlinie liegen, verglichen mit den weiter entfernt liegenden intensiver werden, ein Ergebnis, wie es ja auch das Experiment liefert. Wir haben nun eine Berechnung der Intensitätsverteilung für CO_2 von verschiedenen Drucken ausgeführt, indem wir, ausgehend von dem bei kleinen Drucken gefundenen¹⁾ und von der Theorie für einen Rotator geforderten Spektrum der Rotationslinien, die

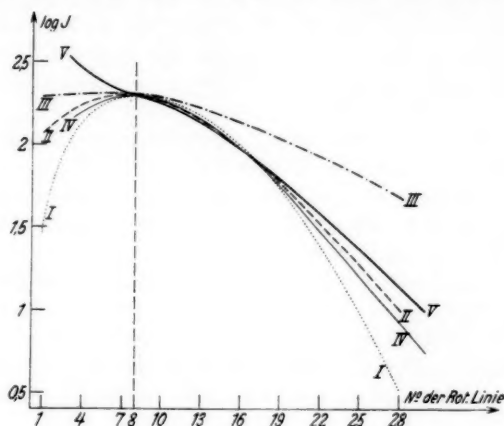


Fig. 3

einzelnen Rotationslinien nach dem geschilderten Verfahren verbreitert und die Einhüllende der Intensitätsverteilung durch Summation ermittelt haben. Das Ergebnis ist in Fig. 3 zusammengestellt. Kurve I stellt die Intensitätsverteilung dar, wie sie sich nach der Placzekschen Theorie für CO_2 von niederem Druck bei 300° abs. ergibt. Die Kurven IV und V sind die von Weiler bei 15 Atm. und 60 Atm. Druck gemessenen Verteilungen. Die Kurven II und III stellen die aus I berechneten Kurven dar, wenn man Stoßverbreiterung berücksichtigt. Bei Kurve II ist das Verhältnis $\frac{z}{2\omega_{16}} = \frac{1}{5}$, bei Kurve III = 1 (z bedeutet die Stoßzahl, ω_{16} ist die der Rotationsquantenzahl $j = 16$ entsprechende Rotationsfrequenz. Bei der ex-

1) W. V. Houston, C. M. Lewis, Proc. Nat. Acad. Sc. 17. S. 229. 1931.

perimentellen Kurve V (60 Atm.) wäre dieses Verhältnis $= \frac{1}{10}$, wenn man als Stoßquerschnitt den gaskinetischen Querschnitt zugrunde legt. Die Kurven sind so übereinander gezeichnet, daß sie für die achte Rotationslinie, wo bei Kurve I das Maximum liegt, intensitätsgleich werden. Die Kurven II—V liegen rechts und links von der achten Rotationslinie oberhalb der für niederen Druck gültigen Kurve I. Die experimentelle Kurve V (60 Atm.) verläuft rechts von der achten Rotationslinie zwischen den beiden theoretischen Kurven II und III, links dagegen oberhalb von beiden Kurven. Man sieht, daß im Prinzip durch geeignete Wahl der Stoßzahl die experimentelle Kurve V für hohe Rotationsfrequenzen (rechts der achten Rotationslinie) durch Stoßverbreiterung erklärt werden kann. Die hierzu notwendige Stoßzahl müßte, wie aus der Fig. 3 ersichtlich ist, freilich größer sein als die aus dem gaskinetischen Querschnitt errechnete¹⁾. Der Verlauf im Bereich kleiner Rotationsfrequenzen ist aber durch Stoßverbreiterung der Rotationslinien allein nicht zu erklären.

Beachten wir noch das Ergebnis unserer früheren Betrachtung, nach welchem die unverschobene Streustrahlung überhaupt keine Stoßverbreiterung zeigt, so können wir zusammenfassend schließen, daß der Intensitätsverlauf der Rayleighstreuung, wie er bei komprimierter Kohlensäure beobachtet wird, durch Stoßverbreiterung allein nicht erklärt werden kann. Vor allem sind für den Teil des Streuspektrums, der sich unmittelbar an die unverschobene Linie anschließt, noch andere Gesichtspunkte zu einer Deutung heranzuziehen.

Hrn. Professor Dr. W. Schütz und Hrn. Dr. J. Weiler danke ich für manche wertvolle Besprechung.

1) Was darauf hindeutet, daß vielleicht auch für diesen Teil des Spektrums noch andere Verbreiterungsursachen heranzuziehen sind.

München, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 6. November 1935)

**Über die Stoßverbreiterung der an komprimierter
Kohlensäure gestreuten unverschobenen Strahlung**

Von E. Kappler und J. Weiler

Im folgenden wird über Versuche berichtet, bei welchen die Breite der an komprimierter Kohlensäure gestreuten unverschobenen Rayleighlinien gemessen wurde. Die Frage, ob die unverschobene Streustrahlung — sei es die polarisierte Tyndallstreuung, sei es der depolarisierte Q -Zweig der Anisotropiestreuung — durch Druck verbreitert wird, ist für die Deutung der von Bhagavantam¹⁾ und Weiler²⁾ gemessenen Intensitätsverteilung der an komprimierten Gasen gestreuten Rayleighlinien von Wichtigkeit. Der allmähliche Übergang des bei niederen Drucken beobachteten Intensitätsverlaufs mit einem Maximum in den seitlichen Flügeln der Rayleighlinie in einen Verlauf, bei dem die Intensität von der Linienmitte aus monoton nach den Flügeln zu abnimmt, und wie er bei hohen Drucken beobachtet wird, wäre im Falle einer Stoßverbreiterung der Linienmitte leicht zu verstehen, wenn man den großen Intensitätsunterschied zwischen den Flügeln und der Linienmitte in Betracht zieht. Folgende Versuche sollten diese Frage entscheiden.

Zunächst wurde mit der von Weiler benutzten Apparatur²⁾ auf einer Platte die ungestreute Primärlinie und dann die in CO_2 von verschiedenen Drucken unter 90° gestreuten Linien photographiert und photometriert. Die Belichtungszeiten waren jeweils so gewählt, daß alle Linien ungefähr dieselbe Schwärzung ergaben. Die Schwärzung war so gering, daß die Linienmitte noch in den linearen Bereich der Schwärzungskurve fiel. Die Schwärzungskurve wurde für jede Belichtungszeit mit einem Satz von Intensitätsmarken nach dem Verfahren von Dorgelo ermittelt. Nachdem die Photometerkurven auf Intensitäten umgerechnet waren, wurde die Breite der Linien an der Stelle gemessen, wo die Intensität auf ein Zehntel derjenigen der Linienmitte gesunken war. Die Gasdrucke waren 25,8; 41 und 59 Atm., die dazu gehörigen Belichtungszeiten waren 120; 33 und 8,5 Min.; die Belichtungszeit für die ungestreute Linie betrug $\frac{1}{2}$ Sek.

1) S. Bhagavantam und A. V. Rao, Proc. Int. Acad. Sc. 1. S. 419. 1935.

2) J. Weiler, Ann. d. Phys. [5] 23. S. 493. 1935.

Die Spaltbreite war $20\ \mu$. Das Spaltbild auf der photographischen Platte betrug im Frequenzmaß $3,5\ \text{cm}^{-1}$. Das Ergebnis war, daß bei allen gestreuten Linien dieselbe Breite gefunden wurde, wie bei der direkt photographierten Primärlinie.

Nach demselben Verfahren wurde auf der gleichen Platte die Breite des Q -Zweigs ermittelt. Q -Zweig und polarisierte Tyndallstreuung lassen sich mit Hilfe eines Nicols auf Grund der Tatsache trennen, daß bei Streuung unter 90° die reine Tyndallstreuung linear polarisiert, der Q -Zweig dagegen depolarisiert ist. Die Drucke waren bei dieser Aufnahme 25,5; 41 und 59 Atm., die Belichtungszeiten betrugen 73,5; 26,5 und 8 Std. Es ergab sich auch für den Q -Zweig bei allen Drucken dieselbe Breite wie bei der eingestrahnten Primärlinie. Sowohl Q -Zweig wie polarisierte Rayleighstreuung zeigen also keine Stoßverbreiterung, ein Ergebnis, das auch theoretisch leicht einzusehen ist, wie in der vorangehenden Arbeit gezeigt wird¹⁾. Bei der ersten Aufnahme ist freilich eine Trennung von Q -Zweig und polarisierter Streustrahlung nicht durchführbar. In Anbetracht des großen Intensitätsunterschiedes zwischen den beiden Anteilen kann man aber sagen, daß praktisch nur die reine polarisierte Rayleighstreuung photographiert wurde.

1) E. Kappler, Ann. d. Phys. [5] 25. S. 272. 1936.

München, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 6. November 1935)